

### III.3 Modelos matemáticos, físicos y conceptuales. Su uso para el pronóstico

#### Modelos

Después de formular un problema e identificar las posibles soluciones que las restricciones permitan considerar factibles, el siguiente paso consiste en formular de nuevo el problema para poderlo analizar más fácilmente. Para esto se utilizan los modelos. Un modelo es una representación cualitativa y/o cuantitativa de un sistema, en el cual se muestran las relaciones predominantes entre sus elementos.

Por esta razón, un modelo no puede incluir todos los aspectos de un sistema real, sino solamente los más importantes. Es decir, los objetivos y procesos físicos y los símbolos y sus relaciones constituyen el modelo, de manera que la representación se hace generalmente, con medios de sustancia distinta a los del sistema original.

Un modelo debe ser bastante detallado si se desea representar válidamente el problema real.

Un modelo contiene los siguientes elementos:

1. **PARÁMETROS.** En el modelo son objetos o símbolos que representan a entidades o atribuciones del sistema que permanecen constantes durante el estudio.
2. **VARIABLES.** Son objetos o símbolos en el modelo, que representan a entidades o atributos del sistema que cambian en el tiempo durante el estudio.
3. **RELACIONES FUNCIONALES.** Son los procesos físicos o las relaciones entre los símbolos de un modelo, que representan a las actividades y a las relaciones entre los elementos de un sistema. Describen la forma en que cambian las variables y como las afectan los parámetros.

Por otra parte los modelos de decisiones tienen dos partes: una función objetivo y un conjunto de una o más restricciones. Una función objetivo es una ecuación que tiene la forma siguiente:

Rendimiento del sistema (P) = alguna relación ( $f$ ) entre variables controladas (C) y variables no controladas (U)

o bien  $P = f(C, U)$

Las variables controladas son las que puede manipular quien toma las decisiones. Las variables no controladas son las que no se sujetan al control de él o los que toman las decisiones.

#### III.3.2 Modelos Matemáticos

Es posible diseñar modelos matemáticos para simulación, y en problemas complejos éstos pueden ser más económicos y existe una gran variedad de este tipo de modelos orientados a encontrar soluciones óptimas (programación matemática).

En general, los modelos matemáticos de sistemas estáticos (que no varían con el tiempo) consisten de ecuaciones algebraicas, mientras que las representaciones matemáticas de sistemas dinámicos y leyes físicas se integran mediante ecuaciones diferenciales.

La precisión de los modelos matemáticos está íntimamente ligada a su costo de explotación, por lo que deben tomarse en cuenta los siguientes factores:

- a) **La exactitud de los datos iniciales.** Tomar en cuenta la discontinuidad de los datos y la magnitud de error de los mismos.
- b) **Tipo de fenómeno a estudiar.** Dependiendo del fenómeno y su importancia dependerá su precisión.
- c) **Exactitud de las ecuaciones que rigen el fenómeno.** Las ecuaciones mediante las que se ha formulado el modelo, pueden determinar un límite a la exactitud con que se podrá describir el fenómeno. Esto puede ser ocasionado por las hipótesis introducidas para simplificar, o bien, por constituir ellas mismas una simple aproximación al no considerar ciertas variables.
- d) **Forma de aproximar las ecuaciones.** Partiendo de un sistema de ecuaciones con los consiguientes errores de truncamiento, la exactitud puede verse afectada.
- e) **Evolución del modelado.** Durante el proceso de cálculo, al cambiar el modelo en el espacio y en el tiempo, puede ocurrir que los errores que se producen se vayan transmitiendo o acumulando, con lo cual la precisión obtenida del modelo puede verse limitada.

La secuencia del desarrollo de un modelo matemático consta de seis etapas que a continuación se describen: La primera etapa se hace una **descripción del fenómeno**, planteándose las variables que intervienen y las hipótesis del comportamiento de la misma. En la segunda etapa se **plantean las ecuaciones que describen matemáticamente el fenómeno** (modelo matemático), las condiciones de frontera y la variabilidad de solución. La tercera etapa consiste **en seleccionar el método de solución** del modelo matemático, es decir la elección del algoritmo de cálculo. En la cuarta etapa, la **programación del algoritmo de cálculo** para una computadora. La **calibración, verificación y validación del modelo** corresponde a la quinta etapa. Por último. La sexta etapa corresponde a la **explotación del modelo**, es decir, la utilización del mismo con base en datos de campo, de experimentos en laboratorios o de supuestos para obtener predicciones.

#### III.3.3 Modelos Físicos

En ocasiones los fenómenos que se desean estudiar son tan complejos, que no basta analizarlos desde el punto de vista matemático; entonces es necesario hacer uso de técnicas experimentales para obtener soluciones prácticas.

Una de las dificultades que presenta la modelación matemática, es la idealización de los fenómenos, en la cual se realizan simplificaciones importantes; esta sólo pueden ser valoradas por medio de pruebas experimentales aplicadas a modelos físicos de escala reducida (o de tipo analógico).

Las instrumentaciones apropiadas de los ensayos en los modelos construidos, suelen arrojar óptimos resultados en cuanto a funcionalidad, estabilidad y economía, dentro de un rango aceptable de certidumbre. Estos resultados son producto de un programa amplio de investigación experimental sobre todas las variables que intervienen.

Lo anterior se realiza para verificar la validez de las soluciones analíticas, determinar relaciones entre las variables involucradas y con ello optimizar la eficiencia de cada elemento del sistema modelo-prototipo cuando es posible establecer modelos matemáticos complementarios.

La aplicación de cualquiera de los dos tipos de modelos, físicos o matemáticos, evidentemente tienen sus limitaciones, mismas que van a depender de la complejidad del problema en la intervención de las variables y sus fronteras a tratar, siendo en algunos casos los modelos matemáticos los más apropiados.

#### MODELOS FISICOS REDUCIDOS

El uso de los modelos físicos a escala reducida, implica que éstos deben ser semejantes al prototipo, para el cual debe satisfacerse las leyes de similitud Geométrica, Cinemática y Dinámica, que en conjunto relacionan las magnitudes físicas homólogas definidas entre ambos sistemas, el prototipo  $A_p$  y el modelo  $A_m$ .

Características:

- a) Debe cumplir con similitud geométrica: igualdad de relación entre longitudes homólogas
- b) Debe cumplir con similitud cinemática: relación invariante entre los desplazamientos en puntos homólogos.
- c) Debe cumplir con similitud dinámica: implica igual relación de las fuerzas dinámicas en puntos homólogos.

Esto basado en la teoría de similitud, establecida por Kline: “Si dos sistemas obedecen al mismo grupo de ecuaciones y condiciones gobernantes, y si los valores de todos los parámetros y las condiciones se hacen idénticas, los dos sistemas deben de exhibir comportamientos similares con tal de que exista una solución única para el grupo de ecuaciones y condiciones”.

#### **VALIDACION DEL MODELO**

Validar un modelo es asignar un nivel de certeza adecuada a los resultados del modelo es decir, asegurarse de que contiene todos los parámetros, variables y relaciones funcionales necesarios para que de respuesta concretas.

Para validar un modelo se utilizan, por lo general, tres pruebas:

1. Se construye el modelo y se analiza para estar seguro de que tiene apariencia de certeza, es decir, que tiene parecido o describe al sistema original.
2. Se efectúa una o más pruebas con el modelo y se pregunta si los resultados parecen razonables.
3. Se busca directamente relacionada o involucrada en el sistema original y se le pide que compara los resultados del modelo con las respuestas actuales del sistema.

#### **II.3.4 Modelos Conceptuales**

Se ocupan en situaciones problemáticas, que va desde el vago reconocimiento de que algo está mal o que puede mejorarse, hasta un estado de emergencia; por ejemplo: desempleo, baja productividad, inflación, etc. Así, los modelos conceptuales son importantes porque obligan a ordenar el conocimiento, fuerzan a ser claros en cuanto a lo que se está tratando de estudiar, observar y medir.

#### **III.3.5 El Pronóstico**

Este aspecto es de gran importancia dentro de la planeación ya que este nos define los acontecimientos “Futuros” que afectaran o beneficiaran los planes de una determinada empresa. Para lograr los planes se parte de varias suposiciones consistentes que nos llevarán a un estado deseado u óptimo. Cabe resaltar, que el grupo de personas que llevan a cabo el pronóstico debe tener la capacidad de visualizar todos los factores que afecten los planes.

##### **Valores del Pronóstico:**

- Obliga al empresario a tener una visión hacia el futuro.
- Revisión de áreas de la empresa.
- Unifica y coordina planes.

### III.3.6 Técnicas

Existen dos tipos fundamentales de técnicas que son los siguientes:

**Cuantitativas:** utilizan técnicas numéricas y modelos matemáticos que nos ayudan a visualizar mejor las diferencias entre las distintas alternativas entre las que podemos mencionar:

Aislamiento simple  
Aislamiento exponencial  
De filtros adaptativos  
Matriz de insumo producto

De descomposición  
Método de Box-Jenkins  
Promedios movibles

Análisis de regresión  
Modelos econométricos

**Cualitativas o Tecnológicas:** solamente se hace una evaluación subjetiva de dichas diferencias y se confía fuertemente en el juicio de los expertos; entre las que se pueden mencionar, tenemos:

Curva lógica y de aprendizaje  
Investigación morfológica  
Método Delphi  
Método TKJ  
Diseño idealizado  
Lluvia de ideas

La selección de un método de pronóstico depende de factores como el conocimiento de las técnicas disponibles, el horizonte de tiempo para el pronóstico, lo apropiado que resulta confiar en datos históricos y en algunos casos la disponibilidad de computadoras y paquetes de programación.

#### **Técnica TKJ**

La técnica TKJ consiste en reunir a un grupo de personas interesadas en analizar una situación problemática específica mediante un proceso ordenado, llegando a sintetizar por el consenso de ellos, las causas que la están produciendo.

La técnica TKJ es una herramienta útil para la identificación y solución de problemas. Parte de hechos superficiales, apariencias, a niveles de causa u origen profundos. Esta técnica estimula la colaboración y la conciliación de intereses y opiniones de los integrantes del grupo, de tal modo que motiva a los involucrados a crear un compromiso de llevar a cabo ciertas acciones de solución concretas y definidas. El ambiente participativo en los miembros del grupo, permite su conscientización y sensibilización ante el problema analizado, conduciendo el autodescubrimiento y aceptación de las causas que lo producen, transformándose el grupo en un equipo de trabajo que busca una meta compartida.

#### **Procedimiento de la técnica TKJ.**

La técnica consiste en tres etapas: la formulación del problema, paso 1 al 8, la identificación y diseño de la solución, paso 9 y 10, y las acciones de implantación y control, pasos 11 y 12.

1. El grupo de trabajo debe estar integrado por cinco, siete o máximo de nueve personas. Habrá un moderador quien dirigirá al grupo.
2. El grupo se reúne en un lugar que permita desarrollo de la técnica, se sientan en una mesa redonda y el moderador explica las reglas de la técnica. Posteriormente los miembros del equipo precisan el problema de análisis.
3. Se reparten tarjetas en blanco y el moderador pide que cada participante anote los “hechos” que considere más relevantes atendiendo a las siguientes reglas:
  - Se anota un “hecho” en una tarjeta, los cuales deben ser recientes, reales y relevantes, concretos y vivenciales, nunca juicios.
  - Deben contener la fecha, el hecho en que se realizó el hecho y nombres de las personas involucradas.
  - Deben ser breves y comprensibles; no se debe generalizar.
  - No debe incluir causas ni consecuencias.
  - Se debe anotar el nombre de quien describe en hecho.Se sugiere que el número de tarjetas sea de tres cuatro o cinco.
4. Las tarjetas se revuelven y se intercambian, no debiendo tocarle a un participante algunas de sus propias tarjetas. El moderador concede unos minutos para que lean y memoricen las tarjetas.
5. Los participantes leen en voz alta sus tarjetas y las agrupan de acuerdo a su contenido.
6. Cada conjunto de tarjetas se coloca en un sobre y se reparten estos entre los participantes. Analizan las tarjetas los participantes y les dan un orden lógico y se hace una síntesis.

La titulación de los sobres debe ser de la siguiente forma:

Contener claramente los hechos agrupados.

No debe de existir suma de hechos, sino la esencia común de los mismos.

Debe de ser sencillo y comprensible, no debe generalizar.

Los participantes deben “sentir” los títulos y deben escribirse en primera persona del plural.

7. Una vez que los sobres han sido titulados, se reparten y se repiten los pasos 4, 5 y 6 en una o varias iteraciones hasta que queden dos o tres agrupamientos titulados. Estos agrupamientos constituyen el resultado final.

8. Se presentan los resultados en diagrama de árbol.

9. Cada miembro del grupo escribe en tarjetas las acciones de solución de algún planteamiento hecho en cualquier nivel de agregación del diagrama.

10. Se procede a intercambiarlas a agruparlas ya obtener la síntesis como los anteriores pasos. Este proceso conduce a la formación de un diagrama de soluciones, similares en la estructura al interior. Debe cuidarse que el vértice del segundo árbol sea la respuesta al vértice del primer árbol.

11. Cada miembro del grupo escribe en tarjetas los compromisos o acciones concretas de alguna solución hecha en cualquier nivel de agregación del diagrama de soluciones. La tarjeta debe expresar quien realizará, cómo se llevará a cabo, cuándo, etc.

12. Al finalizar, se comenta el ejercicio y se integran los compromisos para su seguimiento y control.

Esta técnica sólo es útil cuando se presentan condiciones propicias que un grupo interactúe y se transforme en equipo de trabajo. Si existen fuertes conflictos en los objetivos de los participantes, es preferible no usarla, ya que difícilmente se lograra el consenso y pueden presentarse fuertes confrontaciones.

#### **Método Delphi.**

Quizá este método es el más importante de las técnicas subjetivas. Igual que en la técnica del grupo de expertos, este método utiliza el mismo grupo de expertos –pero no reunidos-. Además de este grupo, se cuenta con uno o más tomadores de decisiones que en última instancia son los responsables de hacer el pronóstico. Por último se tiene personal que realiza las tareas asociadas con el método. Estas tareas incluyen la preparación de cuestionarios y el análisis de los resultados.

El método Delphi emplea primero un cuestionario que se hace llegar a todos los expertos y después se analiza. Con base en los resultados de este primer cuestionario, se desarrolla y envía un segundo cuestionario; los expertos los contestan y los envían para su análisis. Con los resultados de los dos cuestionarios y según la experiencia, los tomadores de decisiones obtienen un pronóstico. El punto medular del método es la retroalimentación de la información que contiene el primer cuestionario al grupo de expertos. Cada miembro de este grupo tiene acceso a la información que le pudo haber faltado en un principio, de manera que cada uno cuenta con la misma información al llenar el segundo cuestionario.

Por supuesto que el éxito del método Delphi estriba en la calidad del diseño de los cuestionarios. En ocasiones se puede utilizar más de dos iteraciones si se juzga necesario. Esta situación ocurre cuando aparece tal divergencia con los dos primeros cuestionarios, que justifica una tercera ronda, con la esperanza de que la retroalimentación de los resultados de la segunda conduzca a una mayor convergencia en la tercera.

#### **Series de Tiempo.**

Una **serie de tiempo** puede verse como la variación de los resultados de la variable aleatoria de interés a lo largo de un periodo fijo, por lo general registrados a intervalos igualmente espaciados. Por ejemplo, el cierre de precios diario de las acciones de AT&T registradas durante el último año constituyen una serie de tiempo. La tasa de desempleo entre enero de 1995 y febrero de 1999 es una serie de tiempo. El comportamiento de una serie de tiempo se puede desplegar en una gráfica, como una gráfica de barras, o de manera tabular. El primer método casi siempre es más descriptivo del patrón general del comportamiento de la serie.

Puesto que una serie de tiempo es una descripción del pasado, un procedimiento lógico para pronosticar el futuro es usar esos datos históricos. Si la historia ha de repetirse, esto es, si los datos pasados indican lo que se puede esperar en el futuro, es posible postular un modelo matemático que sea representativo del proceso. Sin duda, si se conoce este modelo, los datos del pasado pueden sugerir su forma. En las situaciones más reales, la forma exacta del modelo que genera la serie de tiempo no se conoce. Con frecuencia, se elige un modelo mediante la observación de los resultados de la serie de tiempo durante un periodo.

#### **Regresión Lineal.**

Con frecuencia los problemas estadísticos manejan datos en los que existe una relación entre dos variables. Por ejemplo, supóngase que un editor de libros de texto está preocupado por la corrida inicial de impresión de sus libros. Vende libros tanto en librerías como por correo. Este último método se vale de una campaña publicitaria con los medios de comunicación y por correo directo. La campaña publicitaria se lleva a cabo antes de la publicación del libro. El gerente de ventas ha observado que existe una relación lineal interesante entre el número de pedidos por correo y el número de libros vendidos en librerías durante el primer año. Sugiere que esta relación se puede aprovechar para determinar el tamaño de la impresión inicial para libros subsecuentes.

Así, si las ventas de un libro a través de los pedidos por correo se denota por  $X$ , y las ventas en librerías se denotan por  $Y$ , entonces las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  exhiben un **grado de asociación**. No existe una relación funcional entre ellas, es decir, dada la cantidad vendida por correo, no se espera determinar con *exactitud* el número de libros vendidos. Se debe observar que para cualquier cantidad de ventas por correo, existe un intervalo de valores posibles para las ventas en las librerías, etc. La afirmación dicha anteriormente: “existe una relación lineal interesante entre el número de libros vendidos por correo y vendidos en librerías durante el primer año”, implica que el valor esperado del número de libros vendidos en las librerías es lineal con respecto a las ventas por correo, esto es,

$$E[Y/X = x] = A + Bx$$

Así, si la cantidad de las ventas por correo es  $x$  para muchos libros diferentes, la cantidad promedio correspondiente de las ventas de las librerías tiende aproximadamente a  $A + Bx$ . El modelo anterior es un *modelo de grado de asociación*. En algunos casos, existe una **relación funcional** entre dos variables que pueden estar linealmente ligadas. En un contexto de pronósticos, una de las dos variables es el tiempo, mientras que la otra es la variable de interés.

En el análisis de regresión, la notación estándar emplea  $X$  para representar la variable independiente y  $Y$  para la variable dependiente de interés. En consecuencia, la expresión que sigue dicha notación para este modelo de series de tiempo es:

$$Y_t = A + B_t + e_p$$

Donde  $e_p$  es el error aleatorio que se supone tiene media cero y varianza constante.

#### Cuestionario

1. ¿Qué elementos contiene un modelo y cuáles son sus características?
2. ¿Cuál es la diferencia que existe entre las técnicas cuantitativas y las cualitativas?
3. ¿Qué es un modelo matemático?
4. ¿Qué características debe de cumplir un modelo físico reducido?
5. ¿Cuáles son las funciones del pronóstico?
6. De un ejemplo de modelo físico, matemático y conceptual.
7. ¿Para qué sirve el modelo matemático?
8. ¿Cuándo se usa el modelo físico?
9. ¿Cuáles son las ventajas del modelo físico?
10. ¿Cuáles son los pasos a seguir para el desarrollo del modelo matemático?

#### Bibliografía

1. ACKOFF, RUSSELL L., Un concepto de planeación de empresas, Limusa
2. CÁRDENAS, MIGUEL ANGEL, La ingeniería de sistemas. Filosofía y técnicas, Limusa, México
3. FLORES Zavala Víctor, Ingeniería de Sistemas, Fac. de Ingeniería, U.N.A.M.
4. FUENTES Zenón Arturo, El enfoque de sistemas en la solución de problemas, Fac. de Ingeniería, U.N.A.M.
5. VERGARA S. MIGUEL, Técnicas de modelación, edit. Alfaomega.