GEODESIA I

ADOLFO REYES PIZANO

DICTyG
[Ciudad universitaria
México D.F.]
[56 22 80 23]
hidrografia @yahoo.com.mx
[Junio 2012]
M.en I.Adolfo Reyes Pizano.

INGENIERIA GEOMATICA

GEODESIA I

El fundamento para el estudio de la Geodesia son los sistemas de coordenadas, pero más aún la fusión que se lleva a cabo entre la Trigonometría Esférica y la Esfera Celeste

Contenido

ASTRONOMÍA DE POSICIÓN

DEFINICIÓN DE ASTRONOMÍA DE POSICIÓN

La palabra Astronomía, viene del Griego "Aster- Astro" y "Nomos- Ley". Esta ciencia es la más antigua y la más importante dando las bases a los primeros conocimientos humanos; Esta surge desde las primeras sociedades creadas por el hombre para subsistir, y es sin lugar a duda que el espectáculo de los cielos nocturnos, les creó gran curiosidad , obligándolos a estudiarlos. Los documentos que avalan estos estudios, datan de 2000 años antes de Cristo, por los chinos. Los conocimientos sobre Astronomía que invadieron a la Europa moderna se deben a los Arabes.

Después de todas las creencias debido a las únicas explicaciones que solo se apoyaban en los pobres alcances de su conocimiento sobre la naturaleza de la forma de la Tierra y su posición con respecto al Universo, mediante el estudio de las ciencias que apoyaron a la Astronomía, se logró indagar tanto, que actualmente se puede conocer mediante determinado sistema de coordenadas la posición de un punto sobre, en y dentro de la superficie de la Tierra.

La Astronomía requiere de subdividir por subgrupos de estrellas de acuerdo a la zona que se esté observando. Los Egipcios por ejemplo, nombraron 3000 años A.C. estos grupos, usando nombres tales como "El Hipopótamo", "Los Gigantes de la Novilla", "Avestrúz en el mar", sin embargo los Chinos utilizaron nombres relacionados con el medio ambiente de trabajo de los campesinos, tales como: Látigos, Sandalias, Heno, Canales, etc; Así también en México, nuestros antepasados, nombraron algunos astros importantes, como a Venus que era representado como Quetzalcóatl, la Luna era la Diosa Meztli, el cielo nocturno representaba a Tezcatlipoca, pero en la actualidad, los nombres que prevalecen se deben a los Griegos, utilizando nombres relacionados con figuras mitológicas.

Después de dejar claro que la Astronomía ha sido estudiada desde hace mucho tiempo, tuvieron que pasar más de 6000 años para que apareciera un hombre capaz de comprender y entender el Universo Astronómico , y de que tuviese que explicar los grandes errores que tantas generaciones de filósofos cometieron aún la absurda teoría de Tolomeo que ha basado en todos los trabajos y observaciones de sus antecesores, especialmente las de Hipareo, quien describió en su obra titulada el Almagesto, como la Tierra estaba inmóvil en el centro del Universo y que todos los astros giraban alrededor de ella en 24 horas.

La nueva era para la Astronomía se debe a Nicolás Copérnico, cuando en 1543 publicó un sistema de referencia completamente diferente, que inmortalizó su nombre, pero que tuvo que luchar contra esa ignorancia y fanatismo que se había heredado, hasta que al fin los trabajos de Kepler, Galileo y Newton, han venido a demostrar su exactitud hasta la más completa evidencia.

Por lo tanto se puede decir que los fundadores de la Astronomía moderna son: Copérnico, Kepler, Galileo y Newton.

LA TEORÍA DE COPÉRNICO

La historia de la astronomía dio un giro drástico en el siglo XVI como resultado de las aportaciones del astrónomo polaco Nicolás Copérnico. Dedicó la mayor parte de su vida a la astronomía y realizó un nuevo catálogo de estrellas a partir de observaciones personales. Debe gran parte de su fama a su obra de revolutionibus orbium caelestuim (Sobre las revoluciones de los cuerpos celestres, 1543), donde analiza críticamente la teoría de Tolomeo de un Universo geocéntrico y muestra que los movimientos planetarios se pueden explicar atribuyendo una posición central al Sol más que a la tierra. No se prestó mucha atención al sistema de Copérnico, o sistema helio céntrico, hasta que Galileo descubrió pruebas para defenderlo. Gran admirador secreto de la obra de Copérnico, Galileo vio su oportunidad de probar la teoría copernica sobre el movimiento de la Tierra cuando se inventó el telescopio en Holanda. En 1609 construyo un pequeño telescopio de refracción lo dirigió hacia el cielo y descubrió las fases de Venus, lo que indicaba que este planeta girara alrededor del Sol. También descubrió cuatro l unas girando alrededor de Júpiter. Convencido de que al menos algunos cuerpos no giraban alrededor de la }Tierra, comenzó a hablar y a escribir a favor del sistema de Copérnico. Sus intentos de difundir este sistema le llevaron ante un tribunal eclesiástico. Aunque se le obligó a renegar de sus creencias y de sus escritos, esta teoría no pudo ser suprimida.

LAS LEYES DE KEPLER Y LA TEORÍA DE NEWTON

Desde el punto de vista científica de la teoría de Copérnico sólo era una adaptación de las órbitas planetarias, tal como las concebía Tolomeo. La antigua teoría griega de que los planetas giraban en círculos a velocidades fijas se mantuvo en e sistema de Copérnico. Desde 1580 hasta 1597 el astrónomo danés Tycho Brahe observó el Sol, la Luna y los planetas en su observatorio situado en una isla cercada a Copenhague y después en Alemania. Utilizando los datos recopilados por Brahe, su ayudante alemán Johannes Kepler, formuló las leyes del movimiento planetario, afirmando que los planetas giran alrededor del Sol y no en órbitas circulares con movimientos uniforme, sino en órbitas elípticas a diferentes velocidades, y que sus distancias relativas con respecto al Sol están relacionadas con sus periodos de revolución.

El físico británico Isaac Newton adelantó un principio sencillo para explicar las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario: la fuerza de atracción entre el Sol u los planetas. Esta fuerza, que depende de las masas del Sol y de los planetas y de las distancias entre ellos, proporciona la base para a explicación física de las leyes de Kepler. Al descubrimiento matemático de Newton se le denomina ley de la gravitación universal.

Con base en los principios establecidos por estos eminentes sabios, se darán las explicaciones para comprender el cálculo de posiciones geodésicas y el verdadero sistema del Universo, así como la esencia del estudio de la Astronomía.

Además de su definición con base a sus raíces griegas, la Astronomía es la ciencia que trata de la posición, movimiento y constitución de cuerpos celestes, sus movimientos tanto reales como aparentes y las leyes que rigen estos movimientos.

DIVISIÓN DE LA ASTRONOMÍA

La Astronomía se puede dividir en cuatro áreas:

Astronomía Práctica.

Se ocupa del dibujo y uso de los instrumentos Astronómicos, los métodos de observación y la eliminación de los errores.

Astronomía de Posición.

Estudia la relación y geometría entre los cuerpos celestes, posición, distancia, y dimensión, conociendo sus movimientos reales y aparentes.

Astronomía de Mecánica Celeste.

Se encarga de estudiar los cuerpos materiales bajo la acción de una fuerza.

Astrofísica.

Estudia las características Físicas de los astros tales como: su brillo, temperatura, radiación, naturaleza y superficie.

El objeto de este libro es estudiar a la Astronomía de Posición en donde se tratarán, como su nombre lo dice, la posición y movimiento de los cuerpos materiales del Universo en el espacio y en el tiempo, mediante medidas efectuadas en observaciones astronómicas.

También debe quedar claro el sistema de coordenadas que servirán de referencia para ubicar un cuerpo en el espacio y darle una posición determinada, el cual se encuentra en un espacio definido por una escala métrica concreta respecto a un sistema de referencia, pero no al espacio mismo, para tener más claridad, puede considerarse de esta manera: por un lado tenemos al Espacio y por otro lado tenemos a los cuerpos materiales colocados dentro de este espacio y que ocupan posiciones correspondientes a los puntos del espacio; Es de esta manera como se ha conservado en toda la descripción clásica del Universo material, desde la antigüedad hasta comienzos del siglo XX.

Al movimiento de los cuerpos materiales en el Universo se define como el cambio de la posición espacial con respecto al tiempo, de aquí surge la necesidad de tratar el estudio del tiempo, pero es necesario aclarar que el tiempo existe sin la necesidad de que haya movimiento; De aquí surge la necesidad de correlacionar las posiciones relativas de un objeto, respecto a un sistema de referencia de tiempo, además del sistema de referencia en el espacio ya mencionado.

De lo dicho anteriormente, se ve claramente la necesidad de conocer como establecer un sistema de coordenadas de espacio y tiempo adecuado para el estudio que se quiera tratar, además de definir lo que se entiende por espacio y tiempo.

El problema más importante en la Astronomía de Posición, es el de elegir adecuadamente el sistema de coordenadas, para ubicar correctamente los cuerpos en el espacio. De esta elección dependen los métodos de observación que se utilizarán para determinar la posición de los cuerpos celestes vistos por un observador ubicado en la faz de la Tierra.

El orden adecuado para estudiar esta ciencia es el que sigue este libro, que de alguna manera trata de ir dejando bases conforme se avanza, para poder entender de una forma más clara, los temas subsecuentes; Como temas principales se tienen los de Sistemas de Coordenadas y Sistemas de Tiempo, que a su vez le anteceden los de trigonometría esférica y Esfera Celeste; Dejando para más adelante los temas que tratan los métodos y principios de observación y cálculo de coordenadas, tales como: acimut, latitud y longitud.

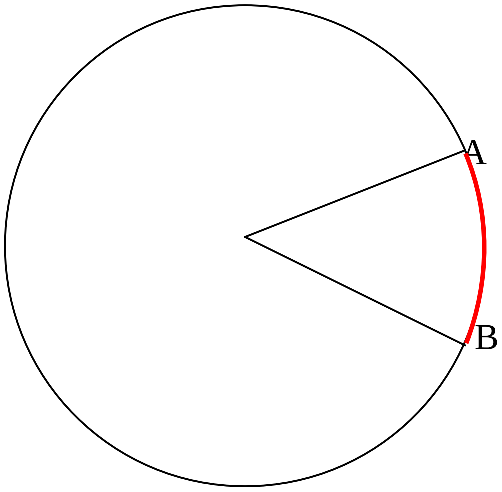
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

DEDUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

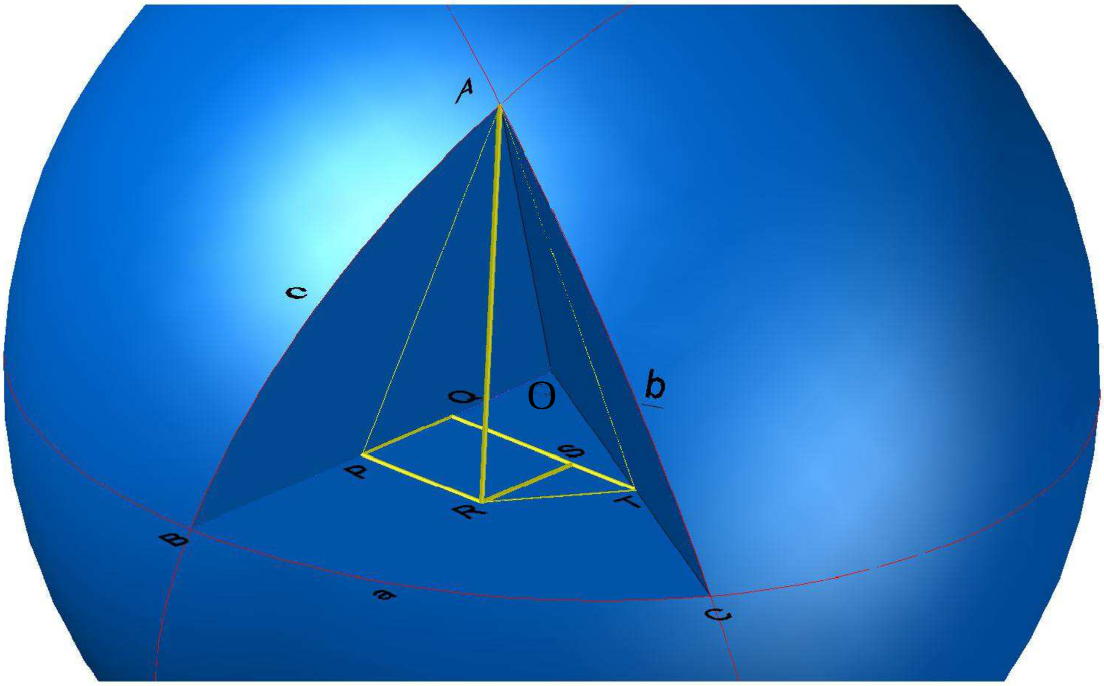
Para el cálculo matemático de las coordenadas esféricas, es necesario conocer los principios de la trigonometría esférica, que al igual que la trigonometría plana, es tan amplia como se requiera; La deducción de las fórmulas más utilizadas dejarán las bases para desarrollar cualquier otra que sea requerida por el lector.

Consideremos una esfera unitaria, en donde existen tres círculos, que contienen cada uno de ellos, al centro de la esfera, (dichos círculos se conocen con el nombre de círculos máximos), estos círculos al cortarse entre sí, forman en la superficie de la esfera cuatro triángulos esféricos; (para el estudio de este tema se consideran solo los triángulos cuyos lados sean menores que una circunferencia), entonces, si por tres puntos P, Q y R pasan tres círculos máximos y que cada círculo toca dos de los tres puntos considerados.

Por ejemplo en la figura 1, vemos un círculo máximo que toca los puntos P y Q, formando dos arcos, únicamente de los cuales, se considera como lado del triángulo esférico aquel que no sea menor a 180° o sea a una semicircunferencia.



Si en un triángulo esférico cuyos vértices sean A, B y C, sus correspondientes lados serán los arcos a, b y c, y los ángulos del triángulo esférico serán los diedros formados por los planos definidos por cada unos de los dos lados considerados y el centro de la esfera.



Las deducciones de las relaciones trigonométricas fundamentales entre los elementos de un triángulo esférico, parten de la figura 2 en donde los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo esférico, sobre la superficie de una esfera unitaria. Por el vértice A tracemos una perpendicular $\overline{AR}$ al plano BOC. Por el punto R pasan las perpendiculares RP y RT a las rectas OB y OC respectivamente y unamos A con P y T formando dos rectas AP y AT que a su vez son perpendiculares con OB la primera AP y con OC la segunda AT. La paralela a PR que pasa por T corta a OB en Q y la paralela a OB en R corta a QT en S.

LEY DE LOS SENOS.

A partir de los triángulos rectángulos ARP y ART, se tiene:

$AR = AP \text{ sen } \angle APR$ ..... ①

$AR = AT \text{ sen } \angle ATR$ ..... ②

Igualando ① y ② tenemos

$AP \text{ sen } \angle APR = AT \text{ sen } \angle ATR$ ..... ③

De los triángulos rectángulos APO y ATO, se tiene:

$AP = OA \text{ sen } \angle AOB$

$AT = OA \text{ sen } \angle AOC$

Como $OA=!$ Por ser una esfera unitaria,

$AP = \text{sen } \angle AOB$

$AT = \text{sen } \angle AOC$

Además.

$\angle AOB = c$ y $\angle AOC = b$

entonces,

$AP = \text{sen } c$ y $AT = \text{sen } b$ ..... ④

Sustituyendo ④ en ③

$\text{sen } c \text{ sen } \angle APR = \text{sen } b \text{ sen } \angle ATR$ .....⑤

pero $\angle APR = B$ y $\angle ATR = C$

De ⑤tenemos

$$\text{Sen } c \text{ sen } B = \text{sen } b \text{ sen } C$$

Donde

$$\frac{\text{Sen } B}{\text{Sen } b} = \frac{\text{Sen } C}{\text{sen } c}$$

De la misma manera, proyectando el punto B sobre el plano AOC y al punto C sobre el plano AOB se tiene análogamente:

$$\text{Sen } a \text{ sen } C = \text{sen } c \text{ sen } A$$

$$\text{Sen } b \text{ sen } A = \text{sen } a \text{ sen } B$$

Lo que permite la siguiente igualdad,

$$\frac{\text{Sen } A}{\text{Sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$$

Donde cada igualdad, relaciona cuatro elementos del triángulo esférico, dos ángulos y dos lados opuestos a sus ángulos.

LEY DE COSENOS.

El segmento OP se puede expresar como la suma de los segmentos OQ mas QP, entonces:

$$OP = OQ + QP \quad ..... \text{①}$$

Expresando estos segmentos mediante funciones tirgonométricas

$$OP = \cos c \quad ..... \text{②}$$

$$OQ = OT \cos a$$

pero

$$OT = \cos b$$

entonces,

$$OQ = \cos b \cos a \quad .....\text{③}$$

$$QP = RS \quad .....\text{④}$$

Considerando al triángulo rectángulo RST, como ST es perpendicular a OB y RT es perpendicular a OC, también el ángulo

$$STR = a \quad .....\text{⑤}$$

Del mismo triángulo RST se tiene

$$RS = RT \text{ sen } \angle STR \quad .....\text{⑥}$$

De la igualdad ⑤ aplicada en ⑥

$$RS = RT \text{ sen } a \quad ..... \text{⑦}$$

Ahora del triángulo RTA

$$RT = TA \cos \angle ATR \quad ..... \text{⑧}$$

$$\text{Como } \angle ATR = C \quad ..... \text{⑨}$$

Aplicando ⑨ en ⑧T= TA cos C ..... ⑩

Por último del triángulo rectángulo OTA

$$AT = \text{sen } b \quad ..... \text{①.①}$$

Sustituyendo ①.① en ⑩

RT= sen b cos C ..... ①.②

Aplicando ①.② en ⑦

RS= sen b cos C sen a ..... ①.③

Sustituyendo ①.③ en ④

OP= sen b cos C sen a ..... ①.④

Llevando las ecuaciones ①.④, ③ y ② a la ecuación ①, y ordenando términos,

Cos c= cos a cos b+ sen a sen b cos C

Para obtener las otras dos expresiones de la ley de los cosenos se pueden hacer las proyecciones de los vértices B y C hacia los planos AOC y AOB respectivamente obteniéndose la ley de los cosenos para los tres lados:

cos a= cos b cos c+ sen b sen c cos A
cos b= cos a cos c+ sen a sen c cos B
cos c= cos a cos b+ sen a sen b cos C

RELACIÓN DEL SENO POR EL COSENO.

De la ley de los cosenos, se tiene:

cos b= cos a cos c+ sen a sen c cos B ..... ①

Despejando y Ordenando

sen a sen c cos B= cos b- cos c cos a ..... ②

Sustituyendo la ley del cos a en ②,

sen a sen c cos B= cos b- cos c- (cos b cos c+ sen b sen c cos A)

Efectuando el producto y desarrollando,

sen a sen c cos B= cos b- cos b $\cos^2$ c- sen b sen c cos c cos A

sen a sen c cos B= cos b (1- $\cos^2$ c)- sen b sen c cos c cos A

sen a sen c cos B= cos b $\sin^2$ c- sen b sen c cos c cos A
sena sen c cos B= sen c (sen b sen c- sen b cos c cos A)

$$\text{sen a cos B= sen b sen c- sen b cos c cos A}$$

Análogamente, se obtienen las cinco relaciones faltantes.

$$\text{Sen a cos B= cos b sen c- sen b cos c cos A}$$
$$\text{Sen a cos C= cos c sen b- sen c cos b cos A}$$
$$\text{Sen b cos A= cos a sen c- sen a cos c cos B}$$
$$\text{Sen b cos C= cos c sen a- sen c cos a cos B}$$
$$\text{Sen c cos A= cos a sen b- sen a cos b cos C}$$
$$\text{Sen c cos B= cos b sen a- sen b cos a cos C}$$

Cada una de astas relaciones, enlaza tres lados y dos ángulos del triángulo esférico, y se pueden aplicar a triángulos oblicuángulos y rectángulos o rectiláteros.

Dividiendo la ley del seno por el coseno entre la ley de los senos, se obtiene la siguiente relación de las cotangentes:

$$\text{Sen a cos B= cos b sen c- sen b cos c cos A}$$

$$\text{Sen a sen B= sen b sen A}$$

$$\text{Sen A cot B= cot b sen c- cos c cos A}$$

Las deducciones de los grupos de fórmulas que se presentan a continuación, son las que el Ingeniero Jesús Ruiz Galindo adoptó para impartir su cátedra de la asignatura de Astronomía de Posición.

FÓRMULAS DE BORDA

De la ley del coseno,

$$\text{cos a= cos b cos c+ sen b sen c cos A}$$

$$\text{cos A}= \frac{\text{cos a- cos b cos c}}{\text{sen b sen c}} \quad \text{.....} \ ①$$

Restando la unidad a ambos miembros

$$\text{1- cos A}= \frac{\text{(sen b sen c+ cos b cos c)- cos a}}{\text{sen b sen c}} \quad \text{.....} ②$$

de la igualdad

$$\text{cos (a} \pm \text{b)= cos a cos b} \pm \text{sen a sen b} \quad \text{.....} ③$$

aplicándola en ② con sus respectivas literales,

$$\text{1- cos A}= \underline{\text{cos (b- c)- cos a}} \quad \text{.....} \ ④$$

$$\text{sen } b \text{ sen } c$$

Ahora sumándole la unidad a ①

$$1+\cos A=\frac{(\text{sen } b \text{ sen } c-\cos b\cos c)+\cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c}$$

acomodando los términos.

$$1+\cos A=\frac{\cos a-(\cos b\cos c-\text{sen } b \text{ sen } c)}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad .....⑤$$

aplicando la igualdad ③ a ⑤

$$1+\cos A=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad .....⑥$$

De las igualdades trigonométricas:

$1+\cos 2\alpha= 2\cos^2\alpha$
$1-\cos 2\alpha= 2\,\text{sen}^2\alpha$

o bien

$1+\cos \alpha= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ ..... ⑦
$1-\cos \alpha= 2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ ..... ⑧

aplicamos estas igualdades ⑦ y ⑧ al miembro izquierdo de las ecuaciones ④ y ⑥.

$$2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad .....⑨$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} A=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad .....⑩$$

Por otro lado tenemos que,

$a+b=p$ ..... ①.①
$a-b=q$ ..... ①.②

sumando ambas expresiones | restando ambas expresiones

$2a= p+ q$
$a= \frac{1}{2}(p+ q)$ ..... ①.③

$2b= p- q$
$b= \frac{1}{2}(p- q)$ ..... ①.④

de la igualdad ③ y las ①.①, ①.②, ①.③, ①.④ tenemos:

$$\cos p= \cos \tfrac{1}{2}(p+ q) \cos \tfrac{1}{2}(p- q)- \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+ q) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p- q) \quad .....①.⑤$$

$$\cos q= \cos \tfrac{1}{2}(p+ q) \cos \tfrac{1}{2}(p- q)+ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+ q) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p- q) \quad .....①.⑥$$

restando ①.⑤ menos ①.⑥

$$\cos p- \cos q= -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+ q) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p- q) \quad .....①.⑦$$

sustituyendo ①.⑦ en ⑨ y ⑩

$$2 \operatorname{sen}^2 A= \frac{-2 \operatorname{sen} (a+ b- c) \operatorname{sen} (-a+ b- c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad .....①.⑧$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A= \frac{-2 \operatorname{sen} (a+ b+ c) \operatorname{sen} (a- b- c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad .....①.⑨$$

Para dejar estas expresiones①.⑧ y ①.⑨ en función del semiperímetro S, procedemos de la siguiente manera.
Si el semiperímetro es:

$$S= \tfrac{1}{2}(a+ b+ c)$$

Entonces las expresiones requeridas en las ①.⑧ y ①.⑨ son:

Sumando ⑨ y ⑩

$$\operatorname{Sen} p+ \operatorname{sen} q= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+ q) \cos \tfrac{1}{2}(p- q) \quad .....①.①$$

Aplicando la expresión ⑩ al miembro derecho de la ③

$$\operatorname{Sen} (\tfrac{1}{2} A+ \tfrac{1}{2} B)= \cos \tfrac{1}{2} C \frac{(2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(s- b+ s- a) \cos \tfrac{1}{2}(s- b- s+ a))}{\operatorname{sen} c}$$

$$\operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} A+ \tfrac{1}{2} B)= \cos \tfrac{1}{2} C \frac{(2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(2s- b- a) \cos \tfrac{1}{2}(a- b))}{\operatorname{sen} c}$$

Considerando las siguientes dos desigualdades... ①.②

$2s= a+ b+ c$
$c= 2s- a- b$
y
$\operatorname{sen} c= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c$

sustituyéndolas en ①.②

$$\operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} A+ \tfrac{1}{2} B)= \cos \tfrac{1}{2} C \frac{2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (a- b)}{2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c}$$

Reduciendo términos y despejando

$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A+ B)= \cos \tfrac{1}{2} (a- b) \cos \tfrac{1}{2} C$$

De la misma manera, pueden obtenerse las otras tres analogías de Delambre y a partir de estas cuatro, por permutaciones circulares, se obtienen las ocho restantes, quedando de la siguiente manera:

$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A+ B)= \cos \tfrac{1}{2} (a- b) \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A- B)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a- b) \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A+ B)= \cos \tfrac{1}{2} (a+ b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A- B)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a+ b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A+ C)= \cos \tfrac{1}{2} (a- c) \cos \tfrac{1}{2} B$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A- C)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a- c) \cos \tfrac{1}{2} B$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A+ C)= \cos \tfrac{1}{2} (a+ c) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A- C)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a+ c) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B$$

$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (B+ C)= \cos \tfrac{1}{2} (b- c) \cos \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (B- C)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (b- c) \cos \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (B+ C)= \cos \tfrac{1}{2} (b+c) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (B- C)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (b+ c) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A$$

Estas analogías de Delambre se utilizan poco en la resolución de triángulos esféricos, pero son útiles para comprobar los elementos ya calculados.

ANALOGÍAS DE NEPER

Estas analogías se obtienen dividiendo las analogías de Delambre.
Por ejemplo, de las dos siguientes:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A- B)= \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a+ b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C$$
$$\cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (A+ B)= \cos \tfrac{1}{2} (a- b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C$$

Dividiendo, resulta.

$$\tan \tfrac{1}{2}(a+b) = \tan c \, \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

De igual manera, se obtienen las siguientes analogías de Neper

$$\tan \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot \tfrac{1}{2}C \, \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \tan \tfrac{1}{2}c \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot \tfrac{1}{2}C \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}$$

Las ocho restantes pueden obtenerse por permutación circular de los elementos. Siendo muy útiles en la resolución de triángulos esféricos.

FÓRMULAS DE BESSEL

Determinando tres ecuaciones de estas características pueden obtenerse todas las demás que relacionen los elementos de un triángulo esférico, en donde cada una relaciona cuatro elementos del triángulo, dos ángulos y dos lados específicamente uno de estos elementos está comprendido entre otros dos.

Considerando un triángulo esférico ABC; se llama triángulo polar al triángulo suplementario A'B'C', el cual cumple con las siguientes condiciones:

A'= 180- a a'= 180- A aplicando las o la ley de los senos, ley de los cosenos y la relación del seno B'= 180- b b'= 180- B por el coseno
C'= 180- c c'= 180- C

Ley de Seno

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} \quad \text{quedando} \quad \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$$

$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$ quedando $-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C (-\cos a)$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

Relación Seno Coseno

$$\operatorname{Sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A$$

quedando

$$-\text{sen } A \cos b= -\cos B \text{ sen } C- \text{sen } B \cos C \cos a$$
$$\text{sen } A \cos b= \cos B \text{ sen } C+ \text{sen } B \cos C \cos a$$

Resumiendo las fórmulas correlativas

Ley de Senos triángulo polar; sen A sen b= sen B sen a
Ley de Cosenos triángulo polar; cos A= -cos B cos C+ sen B sen C cos a
Ley de Senos Cosenos del triángulo polar; sen A cos b= cos B sen C+ sen B cos C cos a

Dividiendo la ley de Seno por el Coseno, entre la ley de los Senos se obtiene la relación de las cotangentes correspondiente al triángulo polar.

$$\text{Sen } a \cot b= \cot B \text{ sen } C+ \cos C \cos a$$

EJEMPLOS:

1.- Con los datos siguientes, determinar la magnitud del arco AB= c
Datos
∠C= 25° 18’ 20”
∠b= 57° 15’ 40”
∠a= 62° 43’ 10”

Solución:

Utilizando la ley de los cosenos, tenemos

$$\text{Cos } c= \cos a \cos b+ \text{sen } a \text{ sen } b \cos C$$

Sustituyendo valores

Cos c= cos 62°43’10” cos 57°15’40”+ sen 62° 43’ 10” sen 57° 15’ 40 “ cos 25°18’20”
Cos c = (.4583479)(.5408/ 13) + (.8887728)(.8411439)(.9040411)
Cos c = (.2478797) + (.675848)
C = $\cos^{-1}$ .9237281
AB = c= 22°31’21.57”

2.- Para el triángulo del problema anterior, cual es la mínima magnitud del punto A al segmento BC= a

Solución:

Trazando una línea que parta de A al segmento CB= a, con la condición de que la línea trazada y el segmento sean perpendiculares, esto nos garantiza que será la

mínima distancia buscada. Realizando lo anterior, nos resultan dos triángulos rectángulos APC y APB
Como del problema anterior tenemos como datos el ángulo en C y el lado b, además el ángulo P= 90°.

Entonces:

C= 25°18'20"
b= 57°15'40"
P= 90°

Y el lado buscado es el c'

De la ley de los Senos

$$\frac{\text{Sen } c'}{\text{Sen } C} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } P}$$

$$\text{Sen } c' = \frac{\text{sen } C \text{ sen } b}{\text{Sen } P}$$

$$\text{Sen } c' = \frac{\text{sen } 25°\ 18'20''\ \text{sen } 57°15'40''}{\text{Sen } 90°}$$

$$\text{Sen } c' = (\ 0.427445)\ (\ 0.8411439)$$

$$c' = \text{sen}^{-1}\ (\ 0.359543)$$

$$c' = 21°04'19.72''$$

3.- Si se conocen los tres lados de un triángulo a, b y c. Calcular sus tres ángulos A, B y C.

Datos:
a= 25°18'14"
b= 57°20'00"
c= 37°40'40"

Solución:

(a+ b+ c)= 120°18'54"
(a+ b+ c)= S= 60°09'27"

(s- a)= 34°51'13"
(s- b)= 02°49'27"
(s- c)= 22°28'47"

$A = \tan^{-1} 0.19494859$
$A = 2\,(11°01'52.94")$
$A = 22°03'45.87"$

$B = \tan^{-1} 2.26115635$
$B = 2(66°08'33.05")$
$B = 132°17'06.1"$

$½\,C = \tan^{-1} 0.2913761$
$C = 2(16°14'41.51")$
$C = 32°29'23.01"$

$A = 22°03'45.87"$
$B = 132°17'06.1"$
$C = 32°29'23.01"$

Cabe hacer notar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es 180+ ε donde ε es el exceso esférico, esto se ve más detallado en el área de Geodesia.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- En un triángulo esférico ABC, C= 90°, a= 120°40’50” y B= 50°37’18”
Calcular los valores de A, b y c

2.- En un triángulo ABC, a= 58°30’40”, b= 70°20’00” y C= 95°03’10”
Calcular los valores de A, C y b

3.- En un triángulo ABC, c= 44°30’12”, b= 52°53’40” y a= 63°42’53”
Calcular A, B y C

ESFERA CELESTE

DEFINICIÓN

Esfera celeste; Llámese así a la esférica ideal descrita con un radio infinito que tiene por centro el ojo del observador y en cuya superficie, imaginamos que se hallan situados todos los astros, esta definición se ha venido dando desde los antiguos tratados que se consideraban la esfera celeste con un radio infinitamente grande, con el objeto de que la dirección de un astro se consideraba paralela para dos observadores situados en distintos lugares sobre la superficie de la Tierra; Tal consideración es incorrecta para la astronomía de posición ya que las direcciones adoptadas sin embargo el radio unitario podemos utilizar las ecuaciones trigonométricas desarrolladas en los capítulos anteriores y sobre todo resulta más ventajoso para desarrollar las transformaciones de coordenadas que se verán más adelante.

Los astros no se hallan todos a igual distancia de la Tierra, pero las diferencias que hay entre sus distancias respectivas, que se determinan por el cálculo, no son sensibles a nuestra vista, por lo que solo apreciamos la dirección de los rayos de Luz que nos envían dichos astros, y como no tenemos término alguno de comparación conocido que nos pueda servir como patrón para estimar su distancia, nos parecen todos igualmente alejados.

Entonces por esto es claro que cada observador se considera en el centro de una esfera, de radio unitario, en cuya superficie interior aparecen los astros, cada uno en la prolongación de su rayo visual correspondiente.

ELEMENTOS DE LA ESFERA CELESTE

Zenit y Nadir: Al ser suspendida una plomada, la fuerza de gravitación, que actúa sobre ella, hace que el hilo que de él penda, forme una línea y si nosotros prolongamos esta en ambos sentidos hasta el infinito tocará a la Esfera Celeste en dos puntos, uno arriba y otro abajo llamados Zenit y Nadir respectivamente.

Vertical del lugar: Se define como la línea recta que une el Zenit y al Nadir. Como cada punto de la Tierra tiene su propio Zenit y Nadir, al igual tendrá su propia Vertical del Lugar.

Círculo Máximo: Como se definió en el capítulo anterior, son todos aquellos que contienen al diámetro de la esfera.

Círculos Verticales: Son todos los círculos máximos que contienen la vertical del lugar.

Horizonte: Es el círculo máximo perpendicular a la vertical del lugar.

Almicantarats: Son todos los círculos paralelos al horizonte.

Eje del Mundo: Si se prolonga el eje de rotación de la Tierra en ambas direcciones, este tocará a la Esfera Celeste en los polos Celestes, conocido dicho eje como Eje del Mundo.

Circuitos Horarios: Son todos los círculos máximos que contienen al eje del mundo.

Ecuador: Es el círculo máximo perpendicular al eje del mundo

Meridiano: Es el círculo máximo que contiene al eje del mundo y a la vertical del lugar, o sea que pasa por los polos, el Zenit y el Nadir (contiene al observador).

Círculos Menores o de Declinación: Son todos los círculos paralelos al Ecuador y representan las trayectorias aparentes de los astros en su movimiento diario. Se dice trayectorias aparentes, porque en realidad es la Tierra la que gira sobre su propio eje.

Primer Vertical: Es el círculo vertical perpendicular al Meridiano.

Eclíptica: Es la trayectoria aparente del Sol en su movimiento diario alrededor de la Tierra y forma un ángulo aproximado de 23°27’ con el ecuador, además define los llamados trópicos de Capricornio y Cáncer
al Norte y al Sur del Ecuador respectivamente.

Línea de los Equinoccios: Es la traza definida por la intersección del plano del Ecuador con el plano de la
Eclíptica, si se prolonga esta línea indefinidamente en ambos extremos, toca a la Esfera Celeste en los puntos conocidos como Equinoccio de Otoño y Equinoccio de Primavera conocido este último como punto Gama (γ), punto primaveral (punto Vernal) o punto Aries.

Coluro de Equinoccios: Se llama así al círculo horario que pasa por los puntos equinoccios.

Línea de los Solsticios: Se define como la traza determinada por la intersección de la eclíptica y el círculo
horario perpendicular al coluro de los equinoccios, y en la intersección de esta línea con la Esfera Celeste, si se definen los puntos conocidos con el nombre de Solsticio de Verano y de Invierno.

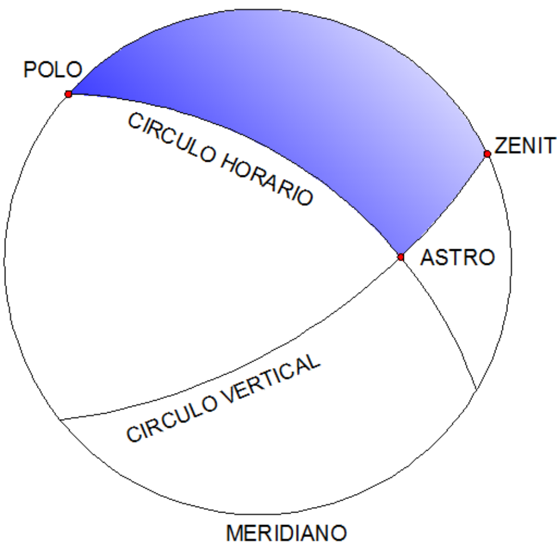
Coluro de los Solsticios: Círculo horario perpendicular al coluro de los Equinoccios.

Meridiana: Se llama así a la traza definida por el plano del Horizonte y el plano del Meridiano, tocando esta línea a la Esfera Celeste en los puntos cardinales Norte y Sur.

La traza definida por el primer vertical y el horizonte, definen en la Esfera Celeste los puntos cardinales Este y Oeste.

TRIÁNGULO ASTRONÓMICO

Triángulo Astronómico: Queda definido sobre la esfera celeste por los puntos denominados Polo Celeste, Zenit del observador y el astro observado.



ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO ASTRONÓMICO

Lados del Triángulo Astronómico

Distancia Zenital: ésta es el complemento de la altura que se mide sobre un arco de círculo vertical a partir del plano del Horizonte hasta el astro observado y su valor varía de 0° hasta 90°

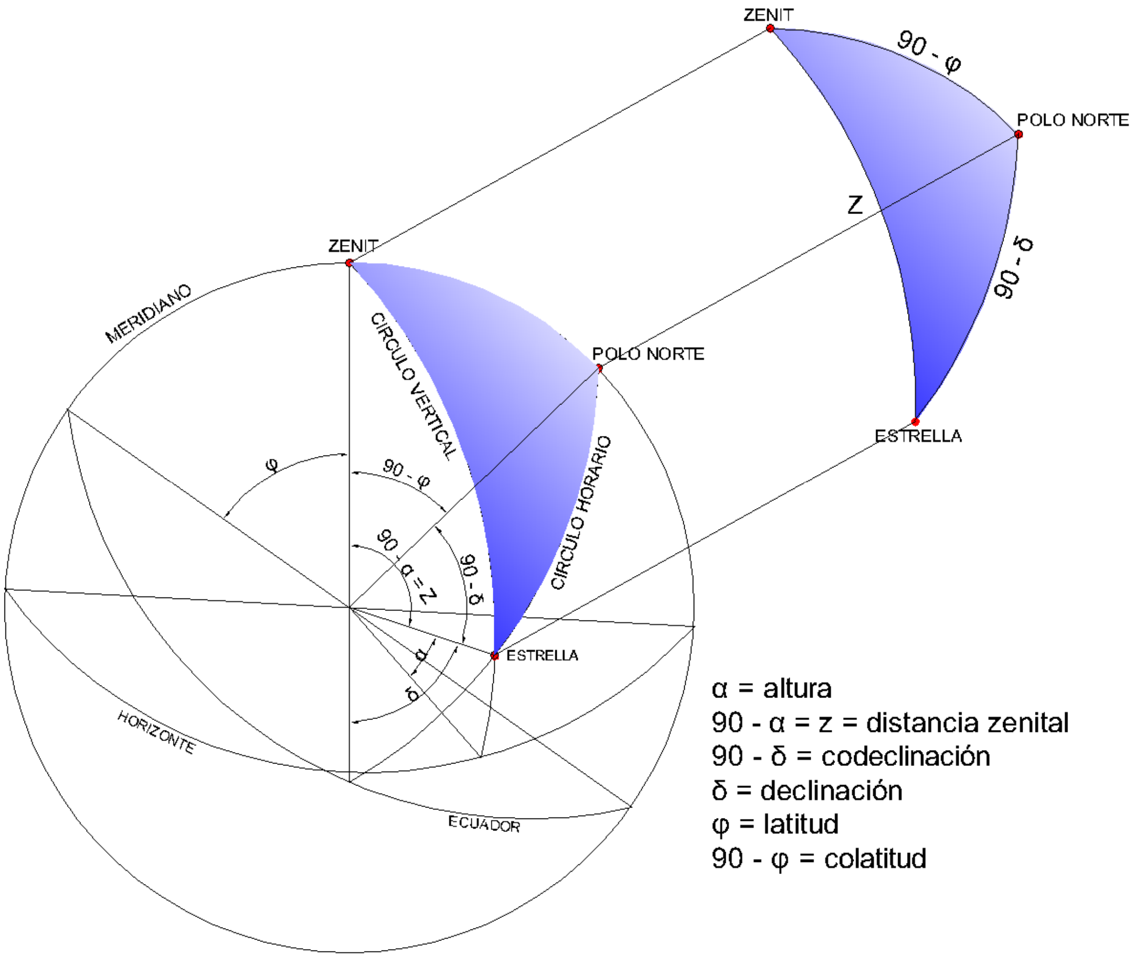
$z = 90 - a$ — *z = Distancia zenital*, *a = altura*

Colatitud: éste es el complemento de la latitud, la que es medida sobre el meridiano a partir del ecuador hasta el lugar del observador, o sea, el zenit, ésta puede ser latitud sur o norte y su valor varía entre 0° y 90°

Colatitud = $90 - \varphi$ — $\varphi = latitud$

Codeclinación: es el complemento de la declinación, y es medida desde el ecuador hasta el astro observado sobre el círculo horario, puede ser declinación positiva o negativa y varía entre 0° y 90°

Codeclinación = $90 - \delta$ — $\delta = declinación$



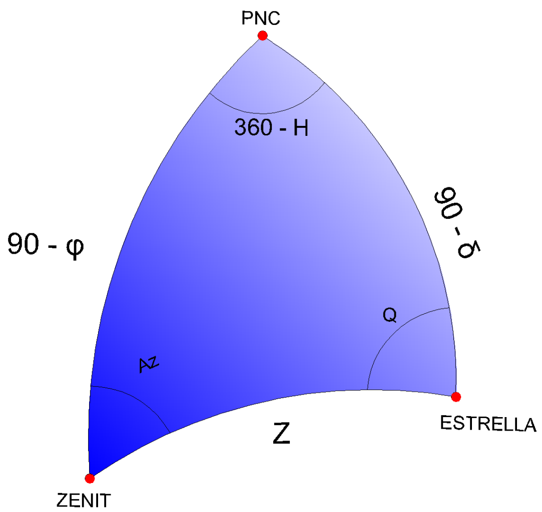
Ángulos del Triángulo Astronómico

Ángulo Paraláctico: (Q) es el ángulo formado por el círculo horario y el círculo vertical que pasan por el astro observado, teniendo como vértice el astro mismo.
Azimut: (Az) es un arco de círculo horizontal medido entre el meridiano y el círculo vertical que pasa por el astro y cuyo vértice es el zenit del observador, se mide a partir del meridiano del lado del polo norte celeste en sentido de mano izquierda (sentido de las manecillas del reloj) de 0° a 360°

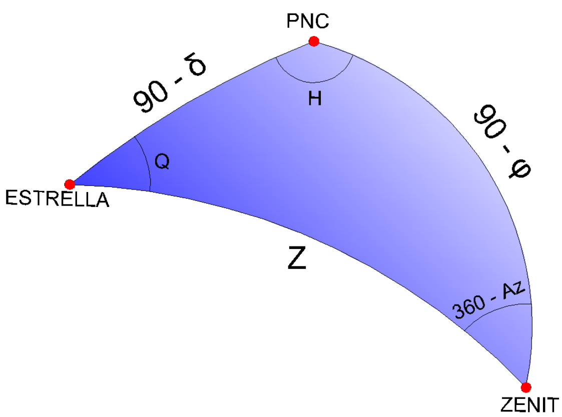
Si el astro observado se encuentra al este del zenit, el valor del ángulo interno a considerar es el propio Azimut, si el astro se encuentra al oeste del zenit, el ángulo interno del triángulo astronómico será el explemento del azimut, o sea $360° - Az$.

Ángulo Horario: (H) es un arco de ecuador medido entre el meridiano y el círculo horario que pasa por el astro y cuyo vértice es el polo. Éste se mide de 0° a 360° o de 0^h a 24^h a partir del meridiano del lado del zenit hasta el círculo horario que contiene al astro.

Si el astro se encuentra al este del zenit entonces el ángulo interno a considerar del triángulo astronómico será el explemento del ángulo horario, o sea, $360° - H°$ o $24 - H^h$; y si el astro se encuentra al oeste del zenit del observador, el valor del ángulo interno del triángulo astronómico será el ángulo horario mismo H.



Triángulo astronómico en donde el astro se encuentra al este del zenit



Triángulo astronómico en donde el astro se encuentra al oeste del zenit

SISTEMAS DE COORDENADAS

INTRODUCCIÓN

Considerando el modelo del universo geocéntrico de Tolomeo y el heliocéntrico de Copérnico, modelos que desencadenaron una lucha ideológica que duró varios siglos, se diferenciaban únicamente en un simple cambio del sistema de referencia. Tolomeo considera un sistema cuyo origen es el centro de la Tierra inmóvil en el espacio, centro del universo, mientras los astros giraban entorno a ésta. Copérnico colocó el origen del sistema de referencia fijo en el Sol pasando a ser éste el centro del universo girando la Tierra y los demás planetas entorno a él además de los demás movimientos de rotación de la Tierra y los correspondientes a los planetas y Lunas. Sin embargo, si analizamos la diferencia entre un sistema y otro la diferencia estriba únicamente en un cambio de coordenadas.

Para poder estudiar los sistemas de coordenadas, y más aún la transformación entre unos y otros, es necesario que queden claros algunos conceptos importantes que veremos a continuación.

DATÚM GEODÉSICO

La figura que representa la Tierra puede ser considerada desde dos puntos de vista, aquella que toma en cuenta únicamente la superficie topográfica, incluyendo el fondo de los océanos, conocido como el terreno natural y la superficie equipotencial del campo de gravedad de la Tierra cuya forma puede ser representada como si el planeta Tierra estuviera compuesto únicamente por agua, denominándosele con el nombre de geoide.

La posición de un punto sobre una de estas superficies puede estar definida por un sistema de coordenadas astronómicas, geodésicas u otras.

Las coordenadas geodésicas están referidas a un elipsoide de referencia con posición y orientación arbitraria, o a otro tal que su orientación es también arbitraria pero su origen es el centro de gravedad de la Tierra y su eje menor coincide con la posición promedio del eje de rotación terrestre; para el primer caso la posición será llamada relativa y en el segundo será absoluta.

Las coordenadas astronómicas habituales son latitud (Φ) y longitud (Λ) y la altura del observador sobre el geoide medida a lo largo de la línea de la plomada, a esta altura se le conoce como Altura Ortométrica (H) obtenida mediante nivelación diferencial y observaciones de la gravedad. Los valores de (Φ), (Λ) y (H) definen la posición del observador con respecto al geoide y al eje de rotación promedio de la Tierra.

Las coordenadas geodésicas son la latitud geodésica (φ) y la longitud geodésica (λ) y la altura del observador sobre el elipsoide de referencia medida sobre la normal al elipsoide, llamada altura geodésica (h). Estas cantidades φ, λ y h definen la posición del observador con respecto al elipsoide de referencia.

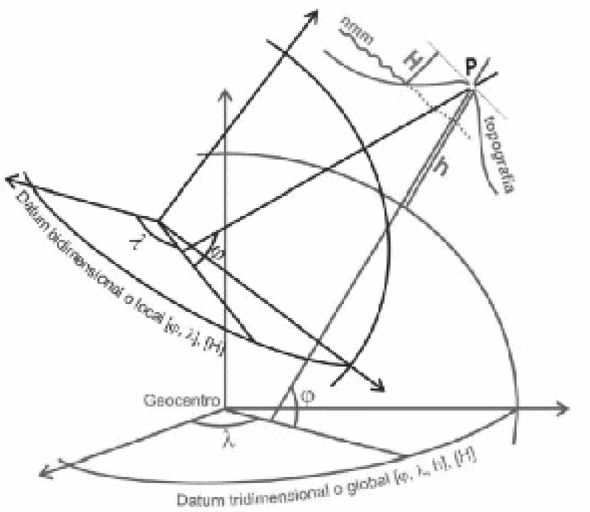
Las coordenadas geodésicas pueden ser determinadas mediante una dirección y la longitud de una línea dada, reducida al elipsoide, aplicando además el ajuste para guardar el control de la distorsión angular dado por la condición de Laplace $(A-\alpha) = (\Lambda-\lambda) sen\varphi$ donde A es el Azimut Astronómico y α el geodésico.

La posición del elipsoide de referencia con respecto al geoide y al eje de rotación promedio está dada por las diferencias entre las coordenadas astronómicas y geodésicas.

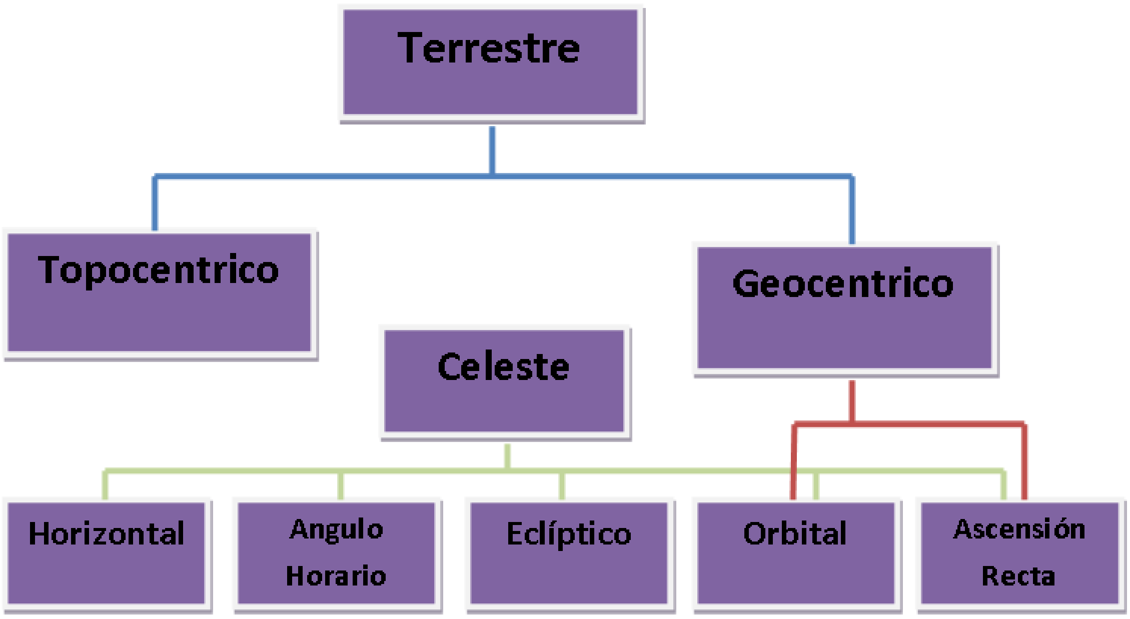
$$\Delta\Phi_0 = \Phi_0 - \varphi_0$$
$$\Delta\Lambda_0 = \Lambda_0 - \lambda_0$$
$$\Delta H_0 = h_0 - H_0$$

Cabe hacer notar que las elevaciones h y H son medidas a lo largo de diferentes líneas, la primera sobre la normal al elipsoide y la segunda sobre la línea de la plomada, por lo que no pueden ser combinadas. Pero para propósitos prácticos el efecto de las diferentes direcciones puede ser despreciado.

Las cantidades $\Delta\Phi_0, \Delta\Lambda_0\ y\ \Delta H_0$ junto con los parámetros del elipsoide de referencia a_0 eje mayor y f_0 el achatamiento, definen el tamaño, la forma y la posición del centro del elipsoide de referencia está dada con la condición de que el eje menos b_0 sea paralelo al eje de rotación promedio de la Tierra. Por ejemplo, en la medida del Azimut hacia un astro en el punto inicial de la red de triangulación y aplicando el correspondiente ajuste mediante la ecuación de Laplace se obtiene el azimut geodésico. Esta condición junto con las cantidades $\Delta\Phi_0, \Delta\Lambda_0\ y\ \Delta H_0$, a_0 y f_0 definen un Datum geodésico.



TIPOS DE SISTEMAS DE COORDENADAS



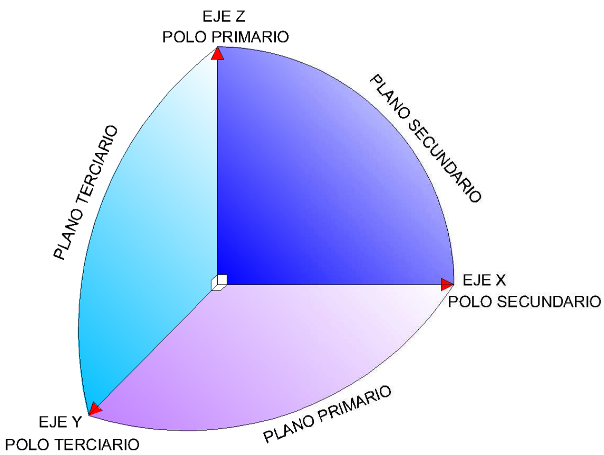
DEFINICIÓN DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Los ejes de un sistema de coordenadas quedarán definidos en función de polos, planos y ejes, de los cuales se definen a continuación:

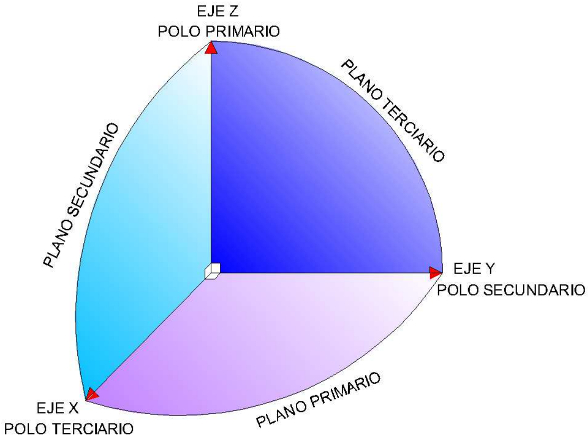
El polo primario siempre será perpendicular al plano primario y corresponde al eje Z o sea el eje terciario.

El polo secundario estará contenido en la Tierra definida por el plano primario y el secundario y corresponde al eje X o sea el eje primario.

El polo terciario estará a 90° y su posición depende del sistema, si es de mano derecha o izquierda, medidos a partir del polo secundario sobre el plano primario y se denominará como eje Y o eje secundario.



Posición del eje Y en un sistema de mano izquierda.



Posición del eje Y en un sistema de mano derecha.

La posición de cada elemento mencionado anteriormente depende del sistema de referencia que se trate, como a continuación se describen:

SISTEMA GEOCÉNTRICO

Origen: punto cercano a la superficie de la Tierra.
Plano primario: plano tangente a la superficie de la Tierra en el punto origen.
Polo primario: la línea de la plomada.
Eje primario: traza definida por el plano ecuatorial y el plano que contiene el meridiano de Greenwich.
Sistema: mano derecha.

SISTEMA TOPOCÉNTRICO

Origen: punto cercano a la superficie de la Tierra.
Plano primario: punto tangente a la superficie de la Tierra en el punto origen.
Polo primario: la línea de la plomada
Eje primario: traza definida por la intersección del plano tangente a la superficie de la Tierra y el plano que contiene a los terrestres. (Meridiano)
Sistema: mano izquierda

SISTEMA DE ASCENCIÓN RECTA

Origen: cerca del centro del Sol.
Plano primario: plano ecuatorial.
Polo primario: eje de rotación de la Tierra.
Eje primario: traza definida por el plano del ecuador y el meridiano que contiene al punto vernal. (Línea de los equinoccios)
Sistema: mano derecha.

SISTEMA ORBITAL

Origen: centro de gravedad de la Tierra.
Plano primario: plano que genera la órbita del satélite artificial entorno a la Tierra.
Polo primario: línea que pasa por el centro de gravedad de la Tierra y perpendicular al plano primario.

Eje primario: línea de los ápsides contenida en el plano orbital en dirección del perigeo.
Sistema: mano derecha.

SISTEMA ECLÍPTICO

Origen: cerca del centro del Sol.
Plano primario: plano que genera el movimiento de traslación de la Tierra.
Polo primario: línea que pasa cerca del centro del Sol y perpendicular al plano de la eclíptica.
Eje primario: línea de los equinoccios generada por la intersección del plano del ecuador y el plano de la eclíptica en dirección del punto vernal.
Sistema: mano derecha.

SISTEMA DEL ÁNGULO HORARIO

Origen: cerca del centro del Sol.
Plano primario: plano ecuatorial.
Polo primario: eje de rotación de la Tierra.
Eje primario: traza definida por la intersección del meridiano celeste y el ecuador.
Sistema: mano izquierda.

SISTEMA HORIZONTAL

Origen: cerca del centro del sol.
Plano primario: plano del horizonte paralelo al plano tangencial en el sitio del observador.
Polo primario: la vertical del lugar hacia el zenit.
Eje primario: la meridiana formada por la intersección de los planos de horizonte y el meridiano
Sistema: mano izquierda.

SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES

Parámetros de medición de los Sistemas de coordenadas Celestes

Para definir la posición de un punto (objeto, estrella, etc.) sobre la bóveda celeste pueden ser utilizadas las coordenadas cartesianas (x, y, z) o polares (υ, ζ, e), en donde, en estas últimas la tercer componente corresponde a la magnitud del vector considerado para nuestro estudio con un valor unitario e=1 tal y como se utilizó en el tema de Trigonometría esférica.

Coordenadas Polares Celestes

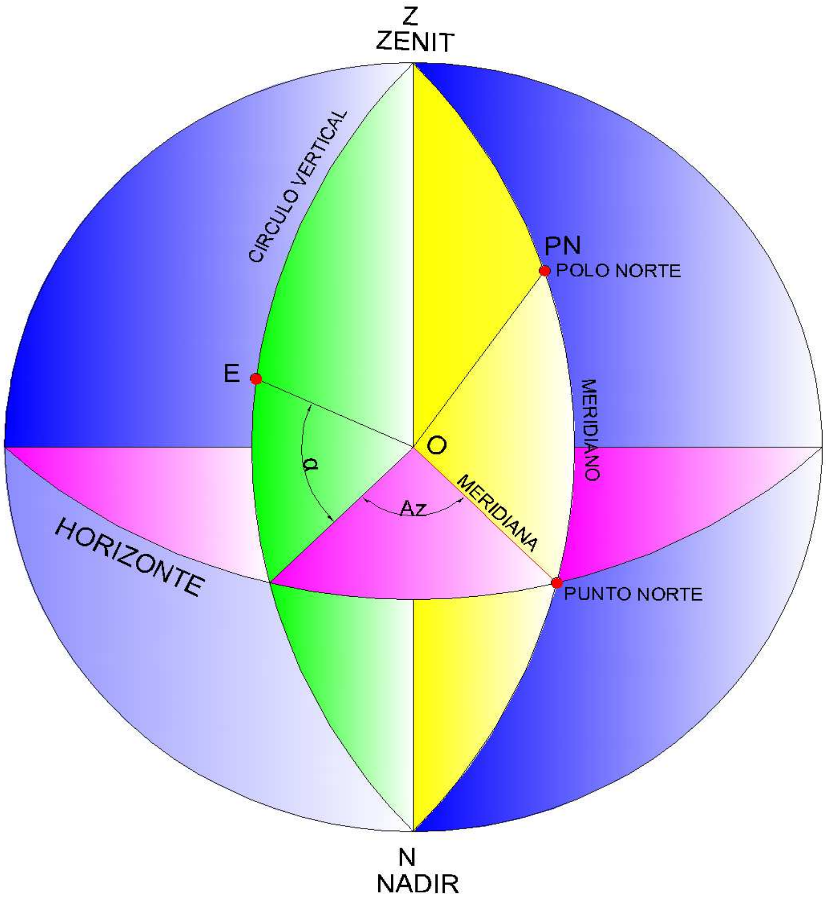
Los sistemas de coordenadas polares celestes están compuestos cada uno de ellos de dos parámetros de medición, los cuales, son medidos a partir de un plano de referencia origen, siendo el primer plano aquél que sea el origen de la primer coordenada y el segundo plano, el origen de la segunda coordenada.

Así, los sistemas de coordenadas celestes reciben el nombre del primer plano de referencia, o también en ocasiones, del nombre del parámetro que es medido sobre el primer plano.

Dependiendo del primer plano de referencia los sistemas utilizados son el Horizontal, Ángulo Horario, Ascensión Recta y el Sistema Eclíptico que a continuación se describen.

Sistema Horizontal

En el sistema horizontal el plano de referencia primario es el plano Horizontal tal y como ya se había mencionado anteriormente, y el plano de referencia secundario es el meridiano celeste. Si E es un punto sobre la esfera celeste la dirección hacia este punto E quedará definida por los parámetros altura (a) y azimut (Az). La altura (a) es el ángulo formado entre la dirección OE y el plano del Horizonte, medido desde 0° hasta 90° sobre el círculo vertical que contiene al punto E. Se considera con signo positivo cuando se mide por encima del horizonte y con signo negativo cuando se mide por debajo del horizonte. Al complemento de la la altura $z = 90 - a$ se llama distancia zenital.

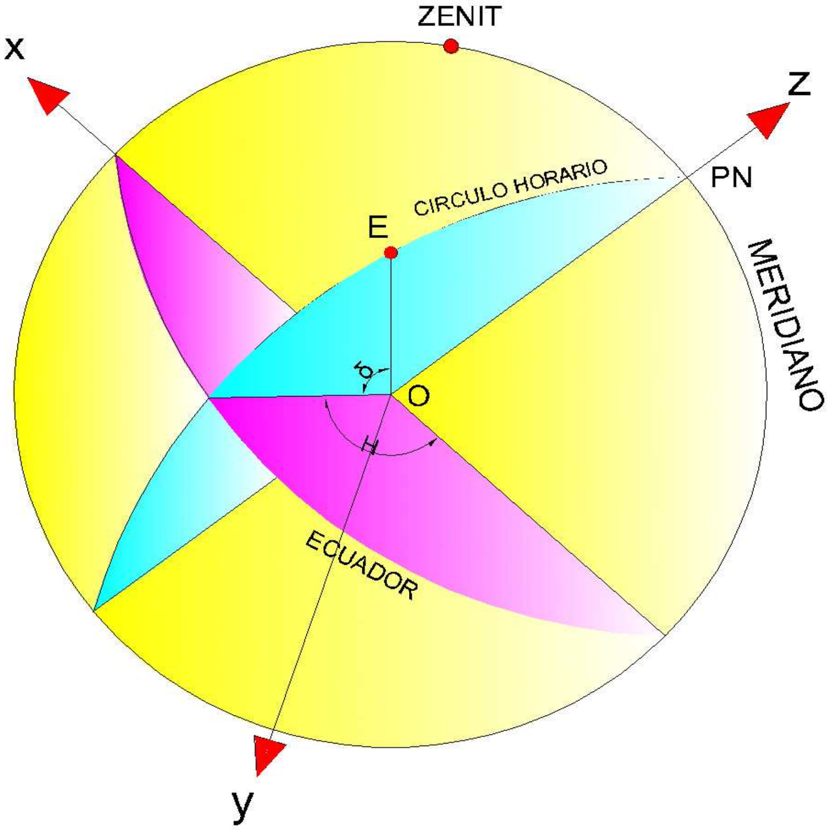


El azimut (Az), es el ángulo medido sobre el plano del horizonte a partir del meridiano hasta el círculo vertical que contiene al punto E. Éste es medido de 0° a 360° en el sentido que va desde el punto norte hacia el punto este.

Sistema de Ángulo Horario

Conocido también con el nombre de Primer Sistema Ecuatorial. El plano de referencia primario es el plano del ecuador y como plano de referencia secundario es el plano del meridiano. Si E es un punto arbitrario en la esfera celeste su posición estará dada por los parámetros del ángulo horario que contiene al punto E y el meridiano, medido a partir del meridiano del lado del zenit hacia el oeste sobre el ecuador de 0^h a 24^h o de 0° a 360°.

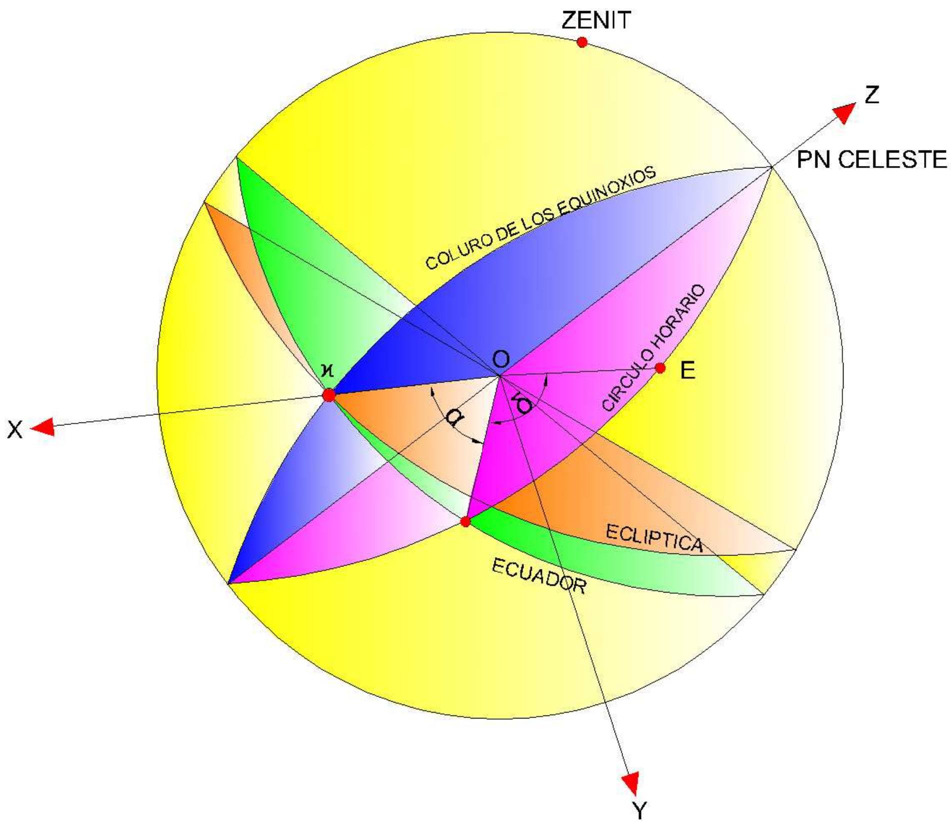
La declinación δ es el ángulo entre la dirección OE (Siendo O el origen del sistema de coordenadas) y el ecuador medido de 0° a 90° sobre el plano del círculo horario que contiene a E, siendo positiva hacia la parte norte del ecuador y negativa hacia la parte sur. Al complemento de la declinación se le conoce como distancia polar.



Sistema de Ascensión Recta

El plano de referencia primario es el ecuador y como plano secundario es el coluro de los equinoxios. Si E es un punto arbitrario en la esfera celeste su dirección estará dada por los parámetros declinación y ascensión recta.

La ascensión recta α es el ángulo entre el círculo horario que contiene a E y el coluro de los equinoxios medido desde el equinoxio vertical o conocido también como punto (γ) sobre el ecuador hacia el este de 0^h a 24^h o de 0° a 360°.



Sistema Eclíptico

El plano de referencia primario es el denominado como eclíptica y el plano secundario el meridiano eclíptico de los equinoxios. Si E es un punto arbitrario en la esfera celeste la posición de este punto E estará dada por los parámetros Latitud eclíptica y Longitud eclíptica.

La latitud eclíptica β es el ángulo entre la dirección OE y el plano de la eclíptica medido sobre el círculo horario eclíptico que contiene el punto E de 0° a 90° siendo positiva cuando se mide hacia el norte y negativa hacia el sur del plano de la eclíptica.

La longitud eclíptica λ es el ángulo entre circulo horario eclíptico que contiene a E y el meridiano eclíptico de los equinoxios medida a partir de este último en el punto denominado como equinoxio vernal o punto γ sobre la eclíptica hacia el este hasta el círculo horario eclíptica del astro y ---- 0° y 360° y el ángulo agudo entre el ecuador y la eclíptica es el ángulo denominado como ε cuyo valor aproximado es de 23°27’

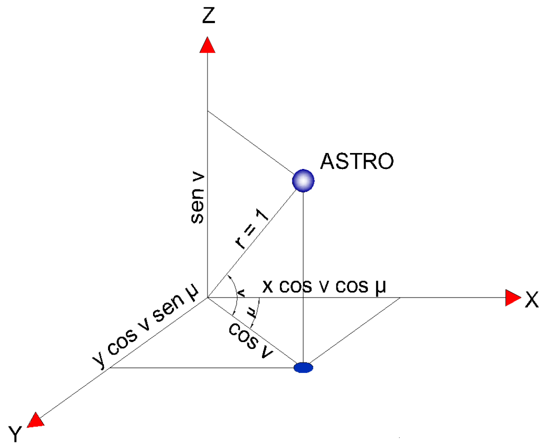
Para poder comprender y visualizar más claramente los sistemas de coordenadas mencionados se presenta un cuadro en el que se muestran los planos y ejes principales, así como parámetros que definen las coordenadas, el origen y sentido de cómo se miden.

Sistema	Plano de Referencia		Parametros medidos desde el Plano de Referencia		Orientacion de los ejes Positivos			μ	ν	Mano
	Primario	Secundario	Primario	Secundario	X Polo Secundario	Y	Z Polo Primario			
HORIZONTAL	HORIZONTE	MERIDIANO (la mitad que contiene al polo Norte)	ALTURA $-90° \leq \alpha \leq 90°$ (+ del lado del Zenit)	AZIMUT $0° \leq Az \leq 360°$ (+ hacia el Este)	PUNTO NORTE	$Az = 90°$	Zenit	Az	α	IZQUIERDA
ANGULO HORARIO	ECUADOR	CIRCULO HORARIO (la mitad que contiene al Zenit)	DECLINACION $-90° \leq \delta \leq 90°$ (+ del lado Norte)	ANGULO HORARIO $0h \leq AH \leq 24h$ ó $0° \leq AH \leq 360°$	Traza definida por MERIDIANO y ECUADOR, del lado del Zenit	$AH = 90°$ $AH = 6h$	POLO NORTE CELESTE	AH	δ	IZQUIERDA
ASCENSION RECTA	ECUADOR	COLURO DE LOS EQUINOXIOS (del lado del punto Vernal)	DECLINACION $-90° \leq \delta \leq 90°$ (+ del lado Norte)	ASCENSION RECTA $0h \leq \alpha \leq 24h$ ó $0° \leq \alpha \leq 360°$ (+ al Este)	EQUINOXIO VERNAL	$\alpha = 90°$ $\alpha = 6H$	POLO NORTE CELESTE	α	δ	DERECHA
ECLIPTICO	ECLIPTICA	MERIDIANO ECLIPTICO (del lado del punto Vernal)	LATITUD ECLIPTICA	LONGITUD ECLIPTICA $0° \leq \lambda \leq 360°$ (+ al Este)	EQUINOXIO VERNAL	$\lambda = 90°$	POLO NORTE ECLIPTICO	λ	β	DERECHA

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS POR MATRICES

DESCRIPCIÓN

Los métodos de transformación mediante matrices, es una manera rápida y fácil ahora con el uso de las calculadoras de bolsillo, por eso el enfoque será especialmente al uso de matrices rotacionales de la forma como se describirá.
Para poder hacer estás transformaciones se requiere conocer que el origen de sistemas de coordenadas cartesianas se localiza en el centro de la Tierra.
Las coordenadas cartesianas de un punto sobre la esfera celeste de radio unitario pueden ser calculadas por las siguientes ecuaciones que se deducen a partir de la siguiente figura:

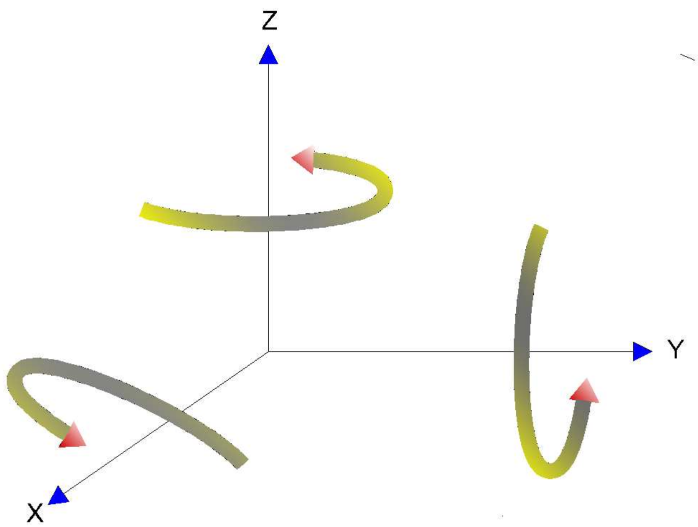


$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\upsilon \cos\mu \\ \cos\upsilon \operatorname{sen}\mu \\ \operatorname{sen}\upsilon \end{bmatrix}$$

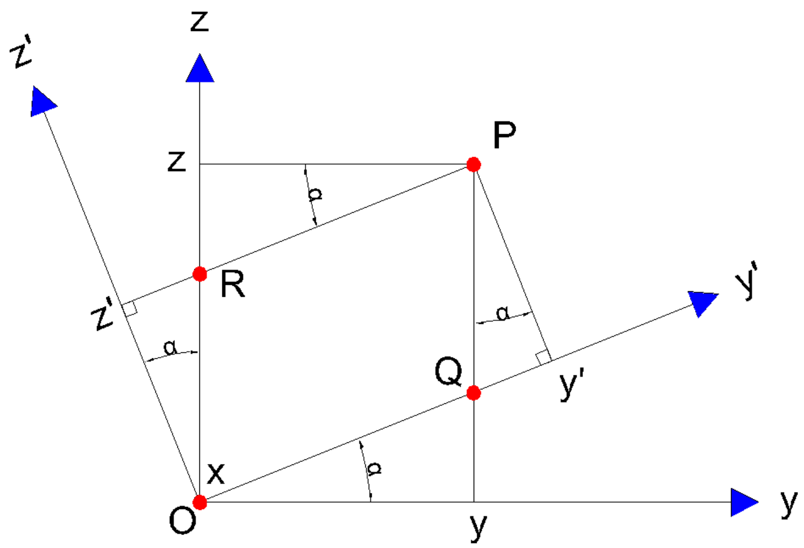
Donde:
μ es el ángulo medido sobre el plano primario a partir del polo secundario hasta la proyección en el mismo plano primario del vector espacial que une el origen de coordenadas y el astro.
υ es el ángulo de elevación del vector espacial r medido desde el plano primario.

Las matrices rotacionales de orden 3X3 denominadas $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$, $R_3(\alpha)$ pueden ser utilizadas para rotar un sistema de coordenadas de tres dimensiones el ángulo α en torno a los ejes x, y, z respectivamente.

La rotación positiva y el sistema considerado de mano derecha pueden verse más claro en la siguiente figura:



A partir de este sistema y considerando las rotaciones en el sentido contrario de las manecillas del reloj se deducen las matrices rotacionales
Rotación en torno al eje “x”



Determinación de x’
$x' = x$

Determinación de y’

$y' = OQ + QY'$

$$\cos\alpha = \frac{Y}{OQ}$$
$$OQ = \frac{Y}{\cos\alpha}$$
$$sen\ \alpha = \frac{QY}{PQ}$$
$$QY = PQ\ sen\ \alpha$$
$$PQ = Z - QY$$
$$QY = Y\ tan\ \alpha$$
$$PQ = Z - Ytan\ \alpha$$
$$QY = (Z - Y\ tan\ \alpha)sen\ \alpha$$
$$QY = Zsen\ \alpha - Y\frac{(sen\ \alpha)^2}{\cos\alpha}$$
$$Y' = \frac{Y}{\cos\alpha} + Zsen\ \alpha - Y\frac{(sen\ \alpha)^2}{\cos\alpha}$$
$$Y' = \frac{Y - Y(sen\ \alpha)^2}{\cos\alpha} + Zsen\ \alpha$$
$$Y' = Ycos\ \alpha + zsen\ \alpha$$

De igual manera se deduce Z' *Z' = - Y sen α + Z cos α*

Por lo que las matrices rotacionales en torno a loa eje X, Y y Z denominadas R1, R2 y R3 respectivamente son:

$$R1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos \propto & sen \propto \\ 0 & -sen \propto & cos \propto \end{vmatrix}$$

$$R2 = \begin{vmatrix} cos \propto & 0 & -sen \propto \\ 0 & 1 & 0 \\ sen \propto & 0 & cos \propto \end{vmatrix}$$

$$R1 = \begin{vmatrix} cos \propto & sen \propto & 0 \\ -sen \propto & cos \propto & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

SISTEMAS DE TIEMPO

EL TIEMPO

Las mediciones de intervalo de tiempo se basan en el periodo de rotación de la tierra alrededor de su eje, la unidad de tiempo más usual para los usos comunes y corrientes es el día solar, o sea, el tiempo en que un punto de la tierra da una vuelta con respecto a la dirección del sol.

En los trabajos astronómicos es más conveniente usar una unidad de tiempo que se basa en el verdadero tiempo de una rotación dela tierra, y es el tiempo más conveniente y se llama sidéreo.

En una revolución dela Tierra cada punto de la esfera celeste cruza dos veces el mismo meridiano, el instante en que un punto de la esfera celeste cruza el meridiano se llama tránsito, paso o culminación de este punto, con excepción de las estrellas que están cerca de los polos, en todas las demás únicamente es visible el tránsito superior

SISTEMAS DE TIEMPO

Tiempo sideral
Tiempo solar verdadero
Tiempo solar medio

Estos tiempos tienen algo en común, esto es, que en cierto momento el tiempo resulta ser el ángulo horario de un punto que constituye el origen del sistema; los orígenes de estos sistemas son:

1.- Para el tiempo sidéreo, el punto gama
2.- Para el tiempo solar verdadero, el centro del sol
3.- Para el tiempo solar medio un punto imaginario que es el sol medio.

El origen del tiempo es el instante en que el punto cero del sistema respectivo pasa por el meridiano

Dos pasos consecutivos del punto cero por el meridiano forman un intervalo de tiempo que se llama día y constituye la unidad.

El tiempo en un mismo instante será diferente para todos los puntos dela tierra con excepción de aquellos que se encuentran en un mismo meridiano.

Relación entre tiempo y longitud
El ángulo horario del sol contado a partir de la rama inferior del meridiano de cualquier lugar es el tiempo solar en ese meridiano. Este tiempo será verdadero o medio según se considere el sol verdadero o medio.

La diferencia entre dos tiempos será la diferencia entre ángulos horarios y si esta diferencia ocurre en el mismo instante físico constituirá la diferencia de longitud entre los dos meridianos considerados

CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS DE TIEMPO

En el sistema de tiempo sidéreo el origen es el punto vernal, el cual es muy adecuado para medir el movimiento de las estrellas.

En el sistema de tiempo solar el origen es el centro del sol que cambia de posición con respecto a las estrellas de un día a otro.

La tierra a la vez que da una vuelta o revolución en 24 horas efectúa un viaje alrededor del sol en un año.

En virtud de que la tierra completa una vuelta en un año sobre su órbita y como la eclíptica que contiene a la órbita de traslación está inclinada con respecto al ecuador, este cambio de posición del origen del sistema de tiempo solar verdadero con respecto al solar medio no es uniforme, lo que da origen a la ecuación del tiempo.

ECUACIÓN DEL TIEMPO

Sabemos que el tiempo solar puede ser verdadero o medio según se considere como referencia el sol verdadero que recorre la eclíptica o el sol medio que recorre el ecuador, ambos planos forman un ángulo de 23° 27’ aproximadamente, por lo que se puede ver a simple vista que en tiempos iguales no tienen recorridos iguales ambos soles, esta diferencia se llama ecuación del tiempo.

El valor dela ecuación del tiempo es variable y es variable también su signo según la época del año, siendo en los equinoccios y los solsticios cero

La ecuación del tiempo tiene la siguiente forma:

$Et = Tm - Tv$

Et = Ecuación del tiempo
Tm = Tiempo medio
Tv = Tiempo verdadero

Ejemplo de transformación de tiempo medio a verdadero y viceversa

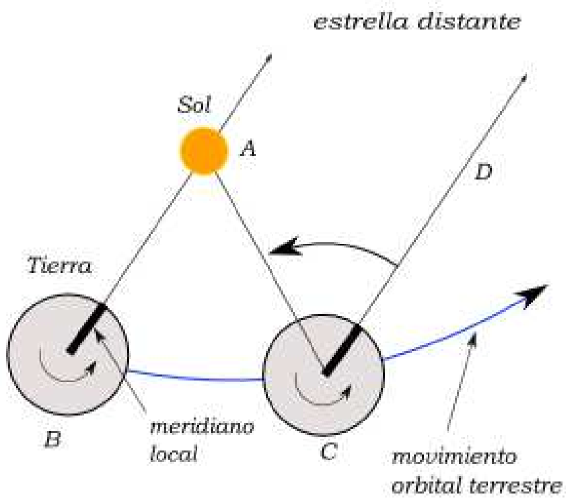
RELACIÓN ENTRE TIEMPO MEDIO Y SIDÉREO Y VICEVERSA

Se llama año trópico al tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del sol por el equinoccio de primavera, la duración de este año es de:

365. 242215 días solares

Por lo tanto el recorrido diario del sol por su órbita es de

$$\frac{360°}{365.242215 \text{ dias}} = 0° \; 59' \; 08.33''$$



Si un día la tierra ocupa la posición B° en su órbita en el momento de su paso por el meridiano, al siguiente día al pasar por el meridiano ocupará la posición C° = B° + 0° 59’ 08.33”, entonces para que el meridiano considerado vuelva a coincidir con el sol, la tierra necesita girar 360° 59’ 08.33”, el intervalo entre estos dos tránsitos constituye el día medio y cada hora corresponderá a un arco de

1^h = 15° 02’ 27.847”

Como las estrellas se consideran fijas la tierra tiene que girar 360°, sobre su eje de rotación, para que un meridiano vuelva a coincidir con una estrella y siendo el intervalo entre dos pasos consecutivos de una estrella por el meridiano el día sideral, cada hora sideral corresponde a un arco de 15°.

El tiempo que la tierra tarda en recorrer el arco de 0° 59’ 08.33” representa el exceso del día medio sobre el sidéreo.

Para evaluar este arco en tiempo medio tenemos que:

$$\frac{15°02'27.847''}{1^h} = \frac{0°59'08.33''}{X}$$

$$X = \frac{0°59'08.33''}{15°02'27.847''}\left(1^h\right)$$

$$X = 0^h 03^m 55.90944^s \quad Tm$$

para evaluar el exceso en tiempo medio ahora tenemos

$$\frac{15°}{1^h} = \frac{0°59'08.33''}{X}$$

$$X = 0^h 03^m 56.55533^s \quad Ts$$

La diferencia entre el día medio y el sidéreo se llama aceleración delas estrellas fijas

Im = 0^h 03^m 55.90944^s
Is = 0^h 03^m 56.55533^s