TEORÍA DE LOS ERRORES

M. EN I. ADOLFO REYES PIZANO

INGENIERÍA GEOMATICA
UNAM

Índice

Introducción

Las mediciones de los distintos observables físicos, con la máxima precisión posible, son de fundamentalísima importancia para las diferentes ramas de las ciencias físicas.

Gracias a ellas y al empleo de ls matemáticas, a dichas ramas de las ciencias, se les llama, con un poco de optimismo, ciencias exactas.

Los resultados de una medición de una magnitud física es un número que depende de:

a) Lo que se mide
b) Del procedimiento de medida
c) Del instrumento usado
d) El observador
e) El medio que rodea a la ejecución de la medida (temperatura, presión atmosférica, tensión del vapor, carga eléctrica, humedad relativa, aceleración de la gravedad)

Para que el número atribuido a una cantidad física tenga sentido, debe de ir acompañado explícita o implícitamente de procedimiento seguido y de las características de los instrumentos utilizados en la obtención de dicho número.

El medir una determinada magnitud física con verdadera exactitud, por rigurosas que sean las precauciones que se tomen. Todo instrumento de medida permite efectuar lecturas dentro delos límites de apreciación del mismo y no es posible construir ningún aparato de medida que pueda efectuar mediciones con errores menores que un determinado valor.

De lo anterior se define que el proceso de medición de las cantidades observables, a lo más que podemos aspirar es a determinar, de la mejor manera posible, el valor más probable, o la mejor estimación que de dicha magnitud podemos hacer teniendo en cuenta el conjunto de los resultados obtenidos y a cuantificar las imprecisiones, o sea, los limites probables de error de dicho valor, que podemos también determinar de las medidas correspondientes.

De lo expuesto precedentemente, tenemos que cada vez que se realiza el conjunto de operaciones requeridas para medir una desminada magnitud, se obtendrá un número, que solamente en forma aproximada, representa la medida buscada. Por lo tanto, cada resultado de una medición está afectado por un cierto error.

La teoría de los errores estudia fundamentalmente el tratamiento matemático que debe efectuarse con los diferentes resultados obtenidos al medir una determinada magnitud, para determinar la mejor aproximación de lo medida buscada y su límite probable de error.

Para llevar una buena estimación es necesario hacer múltiples medidas y de ellas deducir el valor más probable.

Debemos recalcar que cada una de las diferentes mediciones de una determinada cantidad deben ser efectuadas en condiciones físicas similares, es decir, por el mismo observador en igualdad de condiciones, utilizando los mismos instrumentos y procedimientos de medida.

En caso contrario, el conjunto que se obtenga no podrá ser considerado como una muestra representativa del universo de medidas correspondiente a la cantidad física considerada.

El proceso inverso seria: fijado el intervalo de error probable de una cierta magnitud, determinar el número mínimo de mediciones para alcanzar, dentro por supuesto, de un margen de error. Este problema es de fundamental importancia para la programación del trabajo.

Confiabilidad de las medidas

Precisión y exactitud. - nosotros podemos examinar la exactitud y la preciso, 2 conceptos que son impactantes en el tratamiento de los errores.

Precisión: describe el grado de cuidado y refinamiento empleados al hacer mediciones.

Exactitud: muestra las correcciones de los resultados de las medidas.

Ejemplo: todos los relojes de una joyería pueden marcar las 8:20 aunque todos ellos pueden ser inexactos por haber sido arrancados a una hora equivocada.

Ejemplo: en una escuela los relojes están controlados por impulsos eléctricos de tal manera que ellos van al segundo. Si todos ellos están marchando al segundo idénticamente, pero con error de algunos minutos, ellos son precisos, pero no exactos; si ellos fueran corregidos por una señal de radio para ponerlos al tiempo correctos estarían al mismo tiempo exactos y precisos.

Clasificación de las magnitudes observadas.

Las magnitudes observadas pueden ser independientes y condicionadas

Son independientes cuando no tienen ninguna relación con otra magnitud como: la medida de una base, la cota de un banco de nivel.

Son condicionadas cuando sus valores guardan determinada relación con otra magnitud como: los ángulos de un triángulo, por estar sujetos a la condición geométrica de que su suma debe ser igual al exceso esférico más 180ª. En este caso, dos de los ángulos pueden ser considerados como independientes y el tercero como condicionado, en efecto, puede escribirse así la ecuación de condición, llamando a (x, y, z) a los ángulos observados y ε al exceso esférico:

$$x + y + z = 180 + \varepsilon$$

$$x = 180 + \varepsilon - (y + z)$$

Clasificación de los valores

Al considerar una magnitud cualquiera, debemos distinguir en ella 3 valores:

1- Valor verdadero: nunca se conoce
2- Valor observado: resultado de las mediciones

3- Valor más probable: se calcula o determina y es el más cercano al valor verdadero.

El valor verdadero es el que esta exento de error y por lo mismo según lo dicho anteriormente, será siempre desconocido para nosotros.

Valor observado es el que resulta de la observación y experimentación después de hechas todas las correcciones instrumentales y del medio en que se trabaja.

Valor más probable de una cantidad es el valor que se acerca más al valor verdadero de acuerdo con las observaciones hechas o medidas tomadas, valor que se acercara tanto más cuanto más precisas son las observaciones.

Exactitud y errores

Elementos de exactitud. - la exactitud depende de 3 elementos

1- Métodos precisos
2- Instrumentos precisos
3- Adecuada planeación.

Los instrumentos precisos no son absolutamente necesarios, pero ahorran tiempo y, por lo tanto, con ellos se pueden obtener ventajas del tipo económico. Los métodos precisos deben usarse; ellos eliminan o reducen el efecto de todo tipo de errores. Una buena planeación es el elemento más importante para la economía y un elemento muy importante para alcanzar la exactitud. Esto incluye la selección y arreglo del control de los levantamientos, la sección adecuada de los métodos e instrumentos.

Los tres elementos instrumentos, métodos y planeación pueden ser valorados solamente por la economía que los proporcionan, para producir los resultados necesarios y la exactitud deseada. Pero nada se pude escoger de entre estos 3 elementos sin que previamente se estimen los errores que se pueden presentar. De aquí se sigue que un levantamiento con éxito es imposible si no se tiene un adecuado conocimiento acerca de los errores.

Antes de que estudiemos todo lo relativo a los errores, debemos fijar el objetivo de este curso:

Debe hacerse notar que, al efectuar diferentes medidas de una misma magnitud, no solamente en Topografía y Geodesia, sino en la Física y Química experimentales, se observa que, a pesar de usar los aparatos más precisos y los métodos más adecuados, así como la planeación mas adecuada, los resultados finales difieren entre sí. De aquí surgen una serie de preguntas:

¿Cuál de estas mediciones es la buena?

¿Cuál de ellas deben desecharse?

¿Cómo deben combinarse entre sí las observaciones para tener una medida única y definitiva?

¿Hasta que limite deben de usarse las diferentes observaciones para obtener el resultado deseado?

Objetivo

De las anteriores consideraciones podemos establecer el objeto de este curso:

La teoría de los errores tiene por objeto establecer los cálculos necesarios para fijar los términos de comparación (tolerancias) y los métodos para compensar las diferencias inevitables, resultantes de las observaciones múltiples que forman parte de las medidas Topográficas y Geodésicas.

Todos estos cálculos y métodos están basados en el cálculo de probabilidades. Si vamos a estudiar los errores, lo primero que tenemos que hacer es definirlos:

Errores

Equivocaciones. - son confusiones de la mente, es decir, son independientes de los métodos usados y se eliminan mediante la repetición del trabajo, ya sea ejecutado por otra persona o usando otro método o camino. Las equivocaciones están causadas por el observador y personal que lo ayuda, como ejemplo tenemos:

a) Cifras leídas o escritas incorrectamente
b) Signos equivocados
c) Unidades de medidas equivocadas
d) Mala colocación del punto decimal
e) Puntería equivocada
f) Descuido en el desmonte y limpieza de los instrumentos
g) Movimiento desapercibido del equipo usado para medir.

Consejos útiles para eliminar las equivocaciones.

a) Cada valor registrado en el campo debe ser verificado, por medio de alguna observación independiente en el sitio.
b) Una vez que la verificación anterior se ha efectuado y se cerciora uno que no existe equivocación, el registro no debe cambiarse o destruirse. Notas por cambios necesarios hechos posteriormente deben marcarse con color o destacar con algún asterisco o subrayados.
c) Una verificación total debe efectuarse en cada levantamiento de control tantas como verificaciones posibles totales deben ser dispuestas al planear el trabajo y cada verificación total que se planee debe ser calculada y aplicada.

Errores: La palabra error viene del latin errare que significa desviarse, alejarse, vagar. Así en este sentido tomaremos el significado de lo mismo, es decir, alejamiento, desvío, mas no confusión.

En toda serie de observaciones que se ejecuta con el objeto de determinar experimentalmente una cantidad, los resultados parciales difieren siempre, por mucho cuidado que se haya tenido durante las observaciones, en pequeñas cantidades que se designan con el nombre de errores.

Estas pequeñas discordancias dependen en general de tres clases de causas: unas **constantes** o periódicas, otras **sistemáticas** y otras que **no siguen una ley conocida** y que se pueden asimilar a aquellos sucesos que dependen únicamente de la casualidad.

Por lo que los errores los dividiremos en:

a) Constantes
b) Sistemáticos
c) Accidentales

Las primeras, que dependen en general de que durante las observaciones no se ha cumplido con todas las condiciones que éstas requieren, pueden subdividirse en dos especies, que son: cuando la causa obra de una manera constante, afectando el resultado final, siempre con el mismo valor; y cuando Depende de un coeficiente que puede adquirir diversos valores dados por la forma de la ecuación que se tenga que aplicar.

Es evidente que los errores de la primera especie no pueden ser descubiertos por la comparación de los resultados de una serie, y solo se revelarían por la comparación de dos o más series ejecutadas en diferentes circunstancias y con instrumentos diferentes.

Las observaciones que se advierta, que están afectadas de cada clase de errores, deben siempre se desechadas, Puesto que las correcciones necesarias son desconocidas, y por consiguiente, no se puede llegar a encontrar el verdadero valor de la cantidad buscada.

Una estación total que en su limbo horizontal tuviera un error del cero de la medición angular, no reconocido, nos pondría en este caso.

Definición

Errores constantes: son los imborrables a través de todo un trabajo, siempre tienen el mismo signo. Un ejemplo es el error que se presenta cuando se omite tomar en cuenta la comparación de una cinta, independientemente del cambio de temperatura.

En la segunda especie que hemos considerado es a veces posible determinar de qué dependen los errores, y entonces se pueden corregir: pero siendo este caso muy raro, debe siempre el observador procurar con el mayor cuidado de desligar sus observaciones de todas aquellas causas que pueden obrar sobre ellas, ya sean constantes o variables; y si acaso por circunstancias especiales tienen que dejar subsistir algunas de ellas entonces debe llevarla cuidadosamente en cuenta para corregir después su resultados.

Un alta azimut que tenga desnivelado el eje del telescopio o un error en la presión barométrica de que se ha hecho uso para Determinar la refracción, nos presentan ejemplos de esta clase de errores sistemáticos.

Definición

Errores sistemáticos: son aquellos que siguen la ley fija y específica, aunque la misma sea desconocida, pero dependiendo de las circunstancias locales. Un ejemplo, sería: la corrección que por temperatura debe hacerse a una cinta. Otros ejemplos notables son los errores por refracción y paralaje en el Angulo vertical.

La tercera clase de errores depende de causas accidentales, y que no se pueden llevar en cuenta para corregir los resultados finales, como, por ejemplo, pequeños movimientos en los aparatos, refracciones anormales, Etc.

Como estamos en completa ignorancia respecto del modo de obrar de esas causas, Debemos suponer que esos sucesos son debidos únicamente a la casualidad.

Esto en realidad no es más que una hipótesis, puesto que esos sucesos provienen del resultado de la combinación de varias causas que nos son desconocidas; más esa hipótesis es semejante a aquella que se hizo al suponer que cuando se arroja un dado sobre una mesa, no hay razón para que se salga un número más bien que otro.

Definición

Errores accidentales: son aquellos que después de eliminadas las equivocaciones, los errores contantes y sistemáticos aún quedan en las observaciones. Representan el límite de la precisión en la determinación de un valor. Están originados por imperfección de los instrumentos, falibilidad en el observador y ciertas condiciones variables e incontrolables, todas estas causas afectan a las observaciones en mayor o menor grado pero este tipo de errores obedecen a las leyes de la casualidad y pueden ser minimizadas o manejadas por medio de las leyes matemáticas de la probabilidad.

Errores	Constantes o Periódicos (no se cumplieron con todas las condiciones	Constante y el mismo signo	Teodolito mal graduado en su limbo No pueden desecharse por una sola o más series usando el mismo aparato Solo pueden detectarse por comparación de series hechas con diferentes aparatos
	Sistemáticos (afectados por el medio que rodea a la medición, siguiendo alguna ley física)	Determinar la relación matemática que corrige estos errores	Presión barométrica para la refracción Se puede conocer de qué depende el error y tratar de corregir todas las causas que afectan
	Accidentales No siguen ninguna ley. Casualidad	Es importante estudiar estos errores Conocer entre que limites se encuentran. Dar pesos a las observaciones	Se da un tratamiento matemático para obtener el valor más probable.

Hemos visto que en general, pueden las observaciones ser corregidas o independizadas (desligadas) de los errores constantes o periódicos, y por consiguiente las consideraremos únicamente afectadas de los errores llamados variables o accidentales; pues es muy importante estudiar esta clase de errores, para saber entre que limites es probable que esté comprendido el error, y poder de esta manera, asignar un peso a las observaciones, para combinarlas de modo más racional.

Experimento de tiro al blanco

Para investigar estos caracteres, es natural suponer que la probabilidad de los errores es una función analítica de dichos errores. Es claro que dicha función puede tener formas que no satisfagan a esta consideración, pero que en general dependen de cada caso particular, pero como esta forma es la que se presenta más para las investigaciones matemáticas, es la que adoptaremos.

Del hecho de que se haya empleado el mayor cuidado posible en las observaciones, resulta que los errores pequeños deben ser más abundantes que los grandes, siendo el más probable el que tenga un valor nulo; esto nos autoriza aún a suponer que la probabilidad de un error depende de su magnitud.

Notaremos también que cualquiera que sea la clase de observaciones, los errores que se pueden cometer no pasaran nunca de ciertos límites determinados por las circunstancias de la observación; así, la probabilidad de cometer un error igual o mayor que ese límite, debe ser nula.

Además, como se consideran las cusas reales que producen dichos errores, o más bien, como los hemos supuesto esencialmente accidentales, es claro que es igualmente probable que dichos errores se produzcan en un mismo sentido o en otro, es decir que sean positivos o negativos.

De aquí resulta que el error del promedio aritmético tiende hacia cero cuando se aumenta el número de observaciones. “Esta última proposición es universalmente admitida”.

Resumiendo, las consideraciones anteriores estableceremos los siguientes caracteres distintivos para determinar la forma de la función de que se trata.

I- Postulados de Gauss

1- La probabilidad “p” de un error “x” es una función analítica de la magnitud de dicho error.
2- En toda clase de observaciones el error no puede pasar de ciertos límites +k y –k determinados por la clase de observaciones, y por consiguiente la función “p” se nulificará para valores de “x” mayores o iguales a “k”.
3- El promedio aritmético de los errores tiende hacia cero, y por consiguiente el valor más probable de la cantidad que se trate de determinar será el que da el promedio de las observaciones.

Estos caracteres también han sido reconocidos por la experiencia y a su tiempo tendremos cuidado de comparar los resultados de la teoría con los datos obtenidos por la practica con el objeto de corroborar las anteriores hipótesis. Si las admitimos, pues, como ciertas, determinaremos fácilmente la forma de la función, como vamos a hacerlo.

Desarrollo matemático de la ecuación que cumpla con los postulados de Gauss

$$a1 + a2 + a3 + a4 \ldots = 0$$

La probabilidad de que en una observación resulte un error comprendido entre +a y –a sería igual a la suma de los valores que la función puede adquirir cuando x varía entre los limites +a y –a.

Si llamamos “p” a esta probabilidad tenemos:

$$p = \int_{-a}^{+a} f(x)dx \qquad (1)$$

Si los límites establecidos +a y –a, se extienden hasta +k y –k, es evidente, que, según la 2da condición, que el error estará siempre comprendido dentro de estos límites, y por consiguiente p debe ser igual a la certidumbre, o lo que es lo mismo, a 1.

Luego:

$$p = \int_{-k}^{+k} f(x)dx = 1 \tag{2}$$

Llamando a1, a2, a3, … ,an a cada uno de los valores parciales de x, según la 3ra condición, se debe tener que su promedio aritmético debe ser nulo o sea

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0 \tag{3}$$

Pero la probabilidad del error absolutamente determinado a_1 es, según se dijo antes $f(a_1)$ da_1; la probabilidad de a_2 es: $f(a_2)$ da_2 y así sucesivamente, y por consiguiente la probabilidad de que todos estos errores aparezcan simultáneamente, será igual al producto de sus probabilidades parciales, resultado como sigue:

$$f(a_1) * f(a_2) * f(a_3) * . . . \mathrm{d}a_1 * \mathrm{d}a_2 * \mathrm{d}a_3 * . . . \tag{4}$$

Por el hecho mismo de la aparición simultanea delos errores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ debe suponerse que el producto de la ecuación (4), es un máximo. Si establecemos esta condición tendremos que tomar la derivada de dicho producto respecto a cada una de las cantidades $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, e igualarla a cero; más para facilitar esta operación tomaremos las derivadas de sus logaritmos naturales y desecharemos lo términos de segundo orden que resulten. Así se obtendrá:

$$\frac{1}{f(a_1)}\frac{f'(a_1)}{da_1} + \frac{1}{f(a_2)}\frac{f'(a_2)}{da_2} + \frac{1}{f(a_3)}\frac{f'(a_3)}{da_3} + \ldots + \frac{1}{f(a_n)}\frac{f'(a_n)}{da_n} = 0 \tag{5}$$

Los valores de las ecuaciones (3) y (5) estando igualadas idénticamente a cero deben diferir ando menos en un factor constante, multiplicando la ecuación (3) por 2ª e igualándolas resulta:

$$2a\,(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \frac{1}{f(a_1)}\frac{f'(a_1)}{da_1} + \frac{1}{f(a_2)}\frac{f'(a_2)}{da_2} + \frac{1}{f(a_3)}\frac{f'(a_3)}{da_3} + \ldots + \frac{1}{f(a_n)}\frac{f'(a_n)}{da_n} \qquad (6)$$

Por la forma de esta ecuación se ve que cada término del primer miembro debe ser igual a otro del mismo orden del segundo término y como en cada uno de ellos entran todos los valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de "x" podemos sustituir a esa ecuación la siguiente:

$$2ax = \frac{1}{f(x)}\frac{f'(x)}{dx} \qquad (7)$$

Con lo que se tendrá determinada la forma de la función.

En efecto, pasando el dx al primer miembro e integrando, resulta:

$$ax^2 = \ln f(x) + lnk$$

$$ax^2 = \ln\,(f(x) *\ k)$$

Por la definición del logaritmo de un numero tenemos:

$$f(x) *\ k = e^{ax^2}$$

Haciendo k=1/C donde C es una constante

$$\mathrm{f}(x) *\ \frac{1}{C} = e^{ax^2}$$

$$F(x) = C\ e^{ax^2}$$

Pero como f(x) debe disminuir a medida que x crezca acercándose al límite "k", entonces "a" debe ser negativa y podemos sustituir por "–h^2" con lo que la ecuación anterior se convertirá en :

$$F(x) = C\ e^{-hx^2}$$

De acuerdo a la condición establecida:

$$p = \int_{-k}^{+k} f(x)dx = 1$$

Sustituyendo el valor de f(x)

$$p = \int_{-k}^{+k} C\, e^{-h^2x^2} dx = 1$$

Como para valores mayores que k, f(x) es constantemente nula, podremos establecer con la suficiente aproximación lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{-h^2x^2} dx = 1$$

Determinación de la constante “C”

Se usará un procedimiento muy notable debido a Poisson

Para facilitar la operación hagamos

$$h^2x^2 = x'^2$$

Y en lugar de tomar los límites entre - ∞ a + ∞ tomamos los límites entre 0 a + ∞ y duplicamos el resultado. Así tendremos:

$$2\int_{0}^{+\infty} C\, e^{-h^2x^2} dx = 1$$

Como

$$h^2x^2 = x'^2$$

$$h\,x = x'$$

$$x = \frac{x'}{h}$$

$$dx = \frac{dx'}{h}$$

Entonces

$$2\frac{C}{h}\int_{0}^{+\infty} e^{-x'^2} dX' = 1$$

Si en esta expresión cambiamos a X’ en Y’ tenemos

$$2\frac{C}{h}\int_{0}^{+\infty} e^{-y\prime^2} dY' = 1$$

Multiplicando ambas integrales:

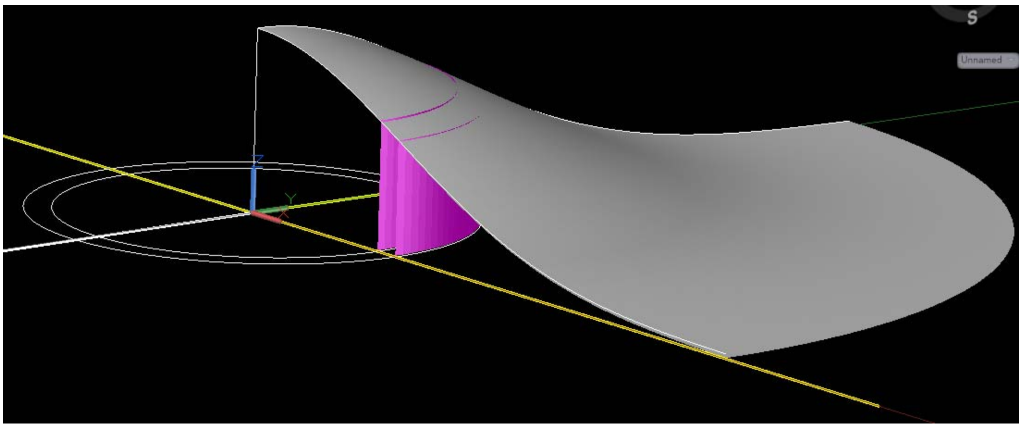
$$\frac{C^2}{h^2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x\prime^2} dX' \int_{0}^{+\infty} e^{-y\prime^2} dY' = \frac{1}{4}$$

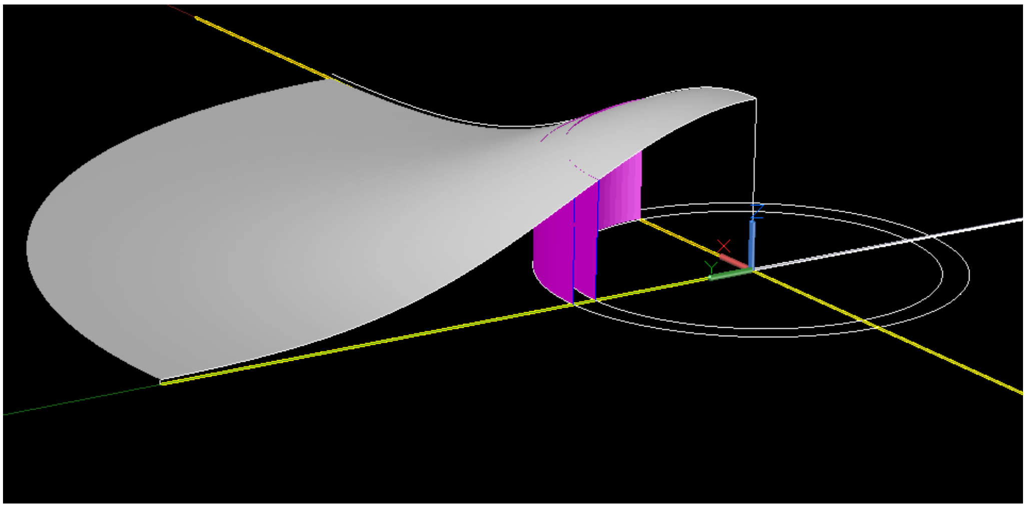
Después de tener la integral doble:

$$\iint_0^{\infty} e^{-x'^2-y'^2} dx'\, dy' = \frac{h^2}{4C^2}$$

Esta Representará la 4ta. Parte del volumen comprendido de la superficie de la distribución Normal, (campana).

Para determinar el volumen, se formarán anillos cilíndricos teniendo como eje Z’ en común:

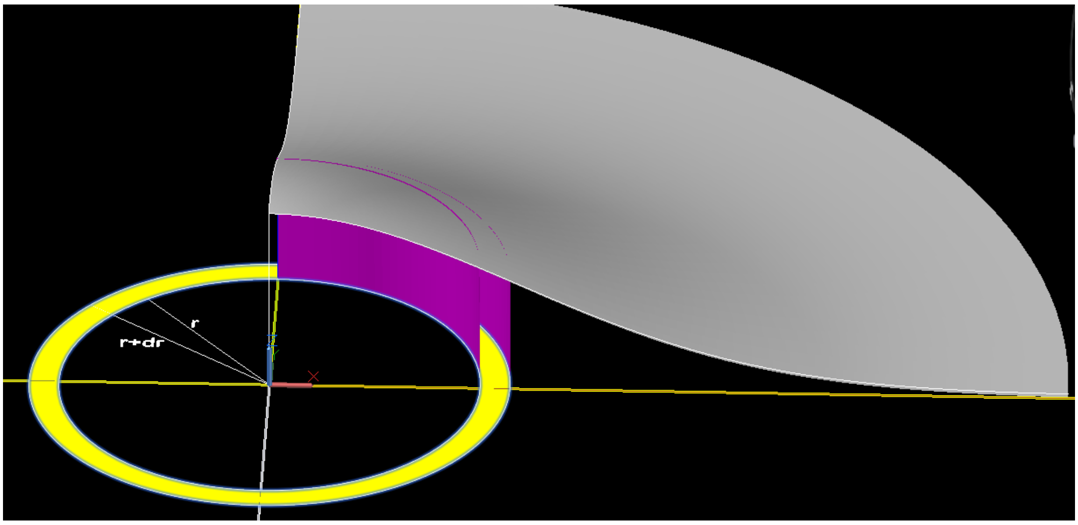




El volumen de un cilindro será entonces el siguiente:

Área de la base por la altura

En este caso el área de la base, será una corona circular por cada añillo que se forme, en este caso particular será el que se presenta en la figura en color amarillo:

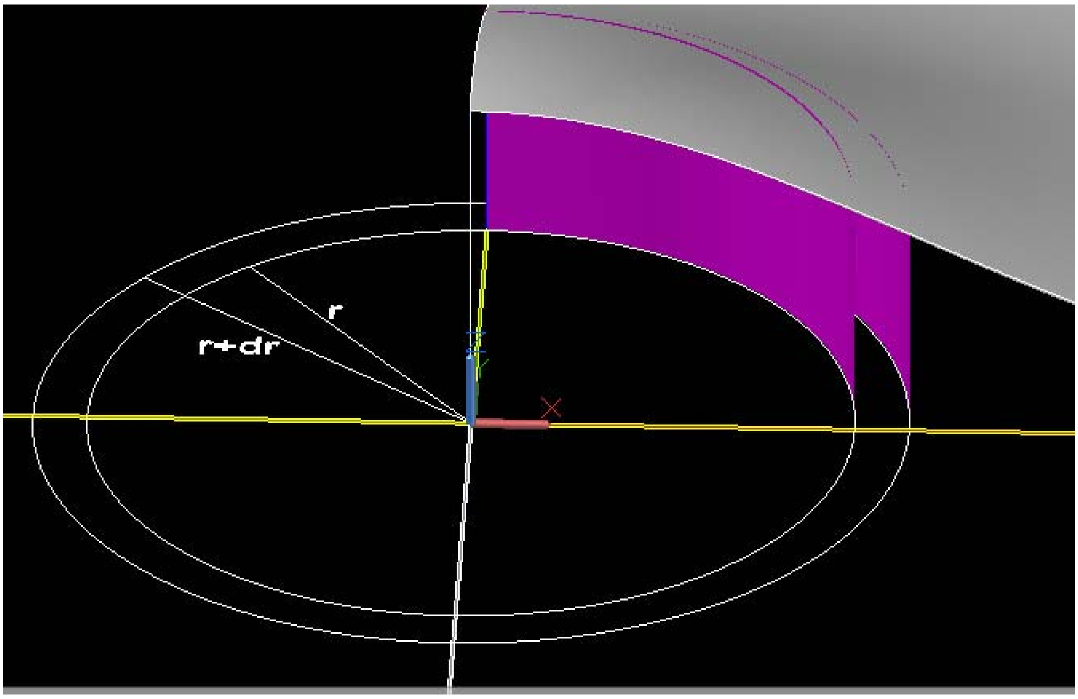


Notando que esta corona circular está formada por dos círculos concéntricos cuyos radios son:

Circulo menor radio = r

Circulo mayor radio = r + dr

Tal y como se observa en la siguiente figura:



El área de la base será entonces la diferencia de áreas del circulo mayor menos el área del circulo menor.

El área del circulo mayor será

$A = \prod (r + dr)^2$

Y la del circulo menor será:

$A = \prod r^2$

Entonces el área de la corona circular será:

$A_{corona} = \prod (r + dr)^2 - \prod r^2$

Desarrollando el binomio y eliminando términos semejantes así como la dr^2 que resulta ya que por ser diferencial es pequeña y elevándola al cuadrado aún más pequeña será.

Resultando:

Favor de hacer el desarrollo anterior y anotar lo que resulte.

A corona $= 2\prod r\, dr$

Esta cantidad que usted obtuvo es el área de la corona, la que multiplicando por su altura Z, que equivale a:

$Z = e^{-x'2 - y'2}$

Pero

$x'^2 + y'^2 = r^2$

entonces sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$Z = e^{-r^2}$

Entonces el volumen del anillo será:

V de un anillo = $e^{-r^2} 2\prod r\, dr$

Y el volumen total es:

$$V\ total = \int_0^{\infty} e^{-r^2}\ 2\prod \mathrm{r\ dr}$$

$$V\ total = \prod$$

Entonces la cuarta parte del volumen será:

$$V\ total = \frac{\prod}{4}$$

$$\frac{h^2}{4C^2} = \frac{\prod}{4}$$

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Por lo que la ecuación de la función que estamos formado será:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\prod}}\ e^{-h^2x^2}$$

Luego la probabilidad de que se presente un error absolutamente determinado será:

$$P = f(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\prod}}\ e^{-h^2x^2}dx$$

Y la probabilidad de un error comprendido entre –x y +x

$$P = \int_{-x}^{+x} \frac{h}{\sqrt{\prod}}\ e^{-h^2x^2}dx$$

Significado del Parámetro h.

Un error accidental debe ser considerado como un suceso que tiene una probabilidad determinada que depende de la magnitud del error y de la clase de observaciones que se ejecuten.

La ecuación que nos da el valor de “P” nos indica que depende también del de “h”; pero no sabemos aún en que relación; para determinarla integraremos la expresión:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\Pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2} dx$$

Para esto desarrollaremos en serie de Maclaurin la expresión:

$$\left(e^{-h^2}\right)^{x^2}$$

Aplicando la serie de Maclaurin es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x) = \left(e^{-h^2}\right)^{x^2}$$

$f(x) = \left(e^{-h^2}\right)^{x^2}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -2e^{-h^2x^2}h^2x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -2h^2(-2e^{-h^2x^2}h^2x^2 + e^{-h^2x^2})$ $\quad f''(0) = -2h^2$

$f'''(x) = (12h^4x - 8h^6x^3)e^{-h^2x^2}$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = (16h^8x^4 - 48h^6x^2 + 12h^4)e^{-h^2x^2}$ $\quad f^{IV}(0) = 12h^4$

$f^{V}(x) = (-32h^{10}x^5 + 160h^8x^3 - 120h^6x)\, e^{-h^2x^2}$

$f^{V}(0) = 0$

$$f^{VI}(x) = (64h^{12}x^6 - 480h^{10}x^4 + 720h^8x^2 - 120h^6)e^{-h^2x^2}$$

$$f^{VI}(0) = -120h^6$$

$$f^{VII}(0) = 0$$

$$f^{VII}(0) = 1680h^8$$

$$f(x) = 1 + 0 - 2h^2\frac{x^2}{2!} + 0 + 12h^4\frac{x^4}{4!} + 0 - 120h^6\frac{x^6}{6!} + 0 + 1680h^8\frac{x^8}{8!} \ldots$$

$$f(x) = 1 - 2h^2\frac{x^2}{2!} + 12h^4\frac{x^4}{4!} - 120h^6\frac{x^6}{6!} + 1680h^8\frac{x^8}{8!} \ldots$$

$$P = \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx$$

$$P = \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\int_{-x}^{+x} (1 - 2h^2\frac{x^2}{2!} + 12h^4\frac{x^4}{4!} - 120h^6\frac{x^6}{6!} + 1680h^8\frac{x^8}{8!})dx$$

Simplificando

$$P = \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\int_{-x}^{+x} (1 - h^2\frac{x^2}{1!} + h^4\frac{x^4}{2!} - h^6\frac{x^6}{3!} + h^8\frac{x^8}{4!})dx$$

Ejecutando la integral

$$P = \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\left[x - \frac{h^2x^3}{3*1!} + \frac{h^4x^5}{5*2!} - \frac{h^6x^7}{7*3!} + \cdots\right]$$

Introduciendo el parámetro “h” resultara lo siguiente:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}h^3x^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5x^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7x^7}{3!} + \cdots\right]$$

Eventos independientes

Se dice que dos eventos A y B son independientes si y solo si la probabilidad del evento B no está influida por el suceso del evento A o viceversa.

¿Has pensado alguna vez sobre cómo un evento puede afectar a otro evento?

¿Sabes cuál es la diferencia entre un evento dependiente y un evento independiente? Si alguien corre una milla en 5 minutos y otra persona corre una milla en 10 minutos, ¿son dependientes estos eventos entre sí?

Ahora podemos pensar sobre eventos diferentes y en cómo estos eventos se impactan mutuamente. Fíjate en esta situación.

Supongamos que tienes dos eventos:

Evento A: al lanzar un dado sale 6

Evento B: al girar la ruleta sale azul

La probabilidad de cada uno de estos mismos eventos es fácil de calcular. En general:

$$P(\text{evento A})=1/6$$

P(evento B)=1/4

Estos dos eventos se realizaron con una ruleta y con un dado.

Ahora surge una pregunta.

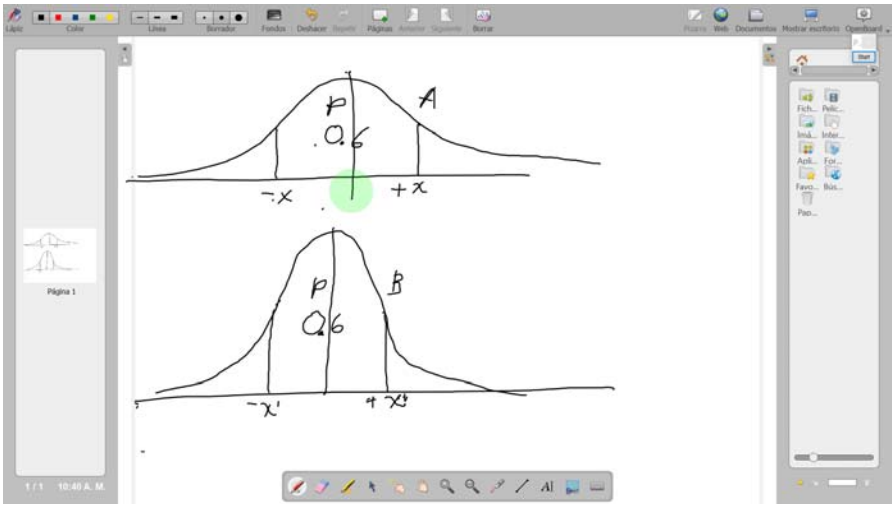
¿El evento A afecta de alguna forma la probabilidad del evento B?

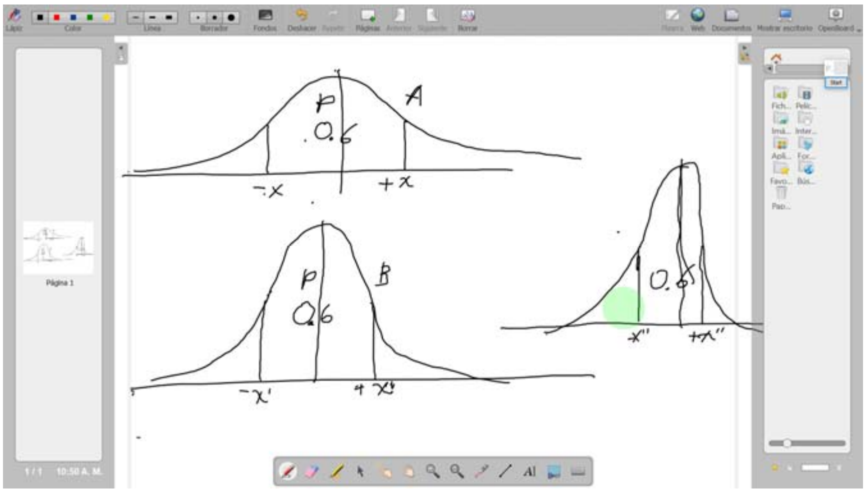
En decir, ¿que al lanzar el dado y salga 6 afecta donde se detiene la flecha en la ruleta? Si no lo hace, entonces se dice que estos dos eventos son eventos independientes.

Definición: si el resultado de un evento no afecta al resultado de un segundo evento, quiere decir que los dos eventos son independientes.

Los eventos A y B de arriba son eventos independientes. Sin importa qué sale al lanzar los dados, sus resultados no afectan el resultado de girar la ruleta.

Supongamos ahora dos series de observaciones de diferente especie, y que se tomen de la primera (evento A) valores para los limites +x y –x tales que la probabilidad del error que resulte comprendido entre ellos, sea igual a la probabilidad que resulte de tomar en la segunda serie (evento B) de observaciones a +x' y a –x' por límites.





entonces se tendrá:

$$\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[hx-\frac{\frac{1}{3}h^3x^3}{1}+\frac{\frac{1}{5}h^5x^5}{2!}-\frac{\frac{1}{7}h^7x^7}{3!}+\cdots\right]=\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[h'x'-\frac{\frac{1}{3}h'^3x'^3}{1}+\frac{\frac{1}{5}h'^5x'^5}{2!}-\frac{\frac{1}{7}h'^7x'^7}{3!}+\cdots\right]$$

Pero para que se satisfaga esta igualdad es necesario que se tenga

$$hx = h'x'$$

acomodando tenemos

$$\frac{h}{h'}=\frac{x'}{x}$$

donde podemos leer la expresión anterior de la siguiente forma:

h es a h' como x' es a x

h : h':: x': x

lo que quiere decir que:

para errores igualmente probables, en dos series de observaciones de diferente especie, los parámetros h y h' son inversamente proporcional a las magnitudes de los errores.

Esta cantidad h es muy propia para expresar la precisión de una serie de experiencias. Gauss le dio el nombre de medida de precisión en las obras francesas se le designa con el nombre de módulo de precisión o de convergencia.

Valor de h:

Error (PROMEDIO) medio de una observación

Para determinar el valor numérico de h necesitaremos introducir una nueva cantidad de valor perfectamente conocido.

Si llamamos a “n” el número de errores iguales a “x”; y “N” el número total de errores, entonces la probabilidad del error del tamaño “x”, será:

$$\frac{n}{N} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$$

Multiplicando los dos miembros por x ^{2}, resultara:

$$\frac{nx^2}{N} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} x^2 dx$$

Si damos a “x” todos los valores posibles, es decir, si integramos entre los limites +∞ y -∞, el miembro izquierdo nos expresara eL promedio de los cuadrados de todos los errores.

En efecto, el numerador nos expresa la suma de los cuadrados de “X”; si damos a “X” todos los valores posibles, nos expresará la suma de los cuadrados de estos valores; y esta suma dividida por el número de valores dados a “X” será el promedio de dichos cuadrados: si representamos este promedio por:

$$\varepsilon_1^2$$

Resultara:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2} x^2 dx$$

Ahora para obtener el valor de "h" en función de ε_1 haremos uso de otra integral definida empleada antes:

Si en la ecuación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{-h^2x^2} dx = 1$$

Se sustituye el valor de "C" encontrado antes, resultara:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

Si diferenciamos esta expresión con respecto a "h", resultara:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} 2hx^2\, e^{-h^2x^2} dx\, dh = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2} dh$$

Que se pude escribir:

$$-\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} x^2 dx\, dh = -\frac{dh}{2h^2}$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2} x^2 dx$$

El primer factor del primer miembro es igual a ε_1^2, luego:

$$-\varepsilon_1^2 dh = -\frac{dh}{2h^2}$$

Suprimiendo factores

$$-\varepsilon_1^2 = -\frac{1}{2h^2}$$

Despejando “h”

$$h = \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{2}}$$

con lo cual queda enteramente determinado e valor de “h”, puesto que $\varepsilon_1$es la raíz cuadrada del promedi de los cuadrados de los errores reales.

Se notara que siendo ε_1 inversamente proporcional al parámetro “h”, que es una medida de precisión, nos dara también una idea clara de la exactitud de las observaciones.

Esta cantidad ε_1 , se le da el nombre de error medio de las observaciones y su valor según se dijo antes es:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{suma\ de\ los\ cuadrados\ de\ todos\ los\ errores}{numero\ total\ de\ errores}}$$

Así podemos decir que el error medio de una observación es: “un error tal que, si existiera el mismo en cada una de las “N” observaciones indistintamente, la suma de los cuadrados de estos “N” errores iguales equivaldría a la suma de los cuadrados de los “N” errores desiguales x’.

Error medio del promedio

Designaremos por $[a^2] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots$. la suma del cuadrado de los errores y por “p” el número de observaciones, entonces la ecuación anterior será:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[a^2]}{p}}$$

Y es según se dijo antes el error medio de las observaciones

Si designamos por “O” el promedio de las observaciones y o’, o’’, o’’’…o^p

Y por "e" el error medio del promedio, se tendrá:

$$O \pm e = [(o' \pm \varepsilon_1) + (o'' \pm \varepsilon_1) + (o''' \pm \varepsilon_1) + \cdots + (o^p \pm \varepsilon_1)]\frac{1}{p}$$

Puesto que ε_1 es el error medio de cada observación.

Pero

$$O = (o' + o'' + o''' + \cdots + o^p)\frac{1}{p}$$

Luego

$$\pm e = \pm\frac{\varepsilon_1}{p} \pm \frac{\varepsilon_1}{p} \pm \cdots \pm \frac{\varepsilon_1}{p}$$

Como el signo que afecta a cada termino $\frac{\varepsilon_1}{p}$ es indiferente, "e" podra tener todos los valores que resulten de cambiar los signos de todas las maneras posibles; si cada uno de estos valores de "e" lo elevamos al cuadrado, tomamos el promedio y extraemos la raíz cuadrada, obtendremos el valor medio de "e" o lo que es lo mismo, el error medio del promedio.

Para mayor caridad supongamos que el error medio de o' sea ε_1' el de o'' sea ε_1'', etc.

Entonces:

$$\pm e = \pm\varepsilon' \pm \varepsilon'' \pm \varepsilon''' \pm \cdots \pm \varepsilon^p$$

Analicemos que sucede tomando solamente dos términos de la ecuación anterior.

$$\pm e = \pm\varepsilon' \pm \varepsilon''$$

Los valores que "e" puede recibir, por la variación de signo de ε' y ε'' será:

$$2^2 = 4$$

$$\pm e = + - \varepsilon' + - \varepsilon''$$

$$\pm e = - \ + \varepsilon' + \ - \varepsilon''$$

$$\pm e = + \ - \varepsilon' - \ + \varepsilon''$$

$$\pm e = - \ + \varepsilon' - \ + \varepsilon''$$

Si elevamos al cuadrado cada uno de estos valores de "e", se tendrá:

$$e^2 = \varepsilon'^2 + 2\,\varepsilon'\varepsilon'' \ + \ \varepsilon''^2$$

$$e^2 = \varepsilon'^2 - 2\,\varepsilon'\varepsilon'' \ + \ \varepsilon''^2$$

$$e^2 = \varepsilon'^2 - 2\,\varepsilon'\varepsilon'' \ + \ \varepsilon''^2$$

$$e^2 = \varepsilon'^2 + 2\,\varepsilon'\varepsilon'' \ + \ \varepsilon''^2$$

Los dobles productos se destruyen

Si tomamos el promedio resultará, puesto que los dobles productos se destruyen:

$$4e^2 = 4\varepsilon'^2 + \ 4\varepsilon''^2$$

$$e^2 = \frac{4\varepsilon'^2 + \ 4\varepsilon''^2}{4}$$

$$e = \ \sqrt{\varepsilon'^2 + \ \varepsilon''^2}$$

Ahora tomaremos tres términos, es decir, hagamos:

$$\pm e = \pm \varepsilon' \pm \varepsilon'' \pm \varepsilon'''$$

Los diferentes valore que "e" puede recibir por la combinación de los signos, será:

$$2^3 = 8$$

$$\pm e = + \ - \ \varepsilon' + \ - \varepsilon'' + \ - \varepsilon'''$$

$$\pm e = - \; + \; \varepsilon' + \; - \varepsilon'' + \; - \varepsilon'''$$

$$\pm e = + \; - \; \varepsilon' - \; + \; \varepsilon'' + \; - \varepsilon'''$$

$$\pm e = + \; - \; \varepsilon' + \; - \varepsilon'' - \; + \; \varepsilon'''$$

$$\pm e = - \; + \; \varepsilon' - \; + \varepsilon'' - \; + \varepsilon'''$$

$$\pm e = + \; - \; \varepsilon' - \; + \varepsilon'' - \; + \varepsilon'''$$

$$\pm e = - \; + \; \varepsilon' + \; - \varepsilon'' - \; + \varepsilon'''$$

$$\pm e = - \; + \; \varepsilon' - \; + \varepsilon'' + \; - \varepsilon'''$$

Elevando al cuadrado

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + 2\varepsilon'\varepsilon'' + 2\varepsilon'\varepsilon''' + 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 - 2\varepsilon'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\varepsilon''' + 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 - 2\varepsilon'\varepsilon'' + 2\varepsilon'\varepsilon''' - 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + 2\varepsilon'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\varepsilon''' - 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + 2\varepsilon'\varepsilon'' + 2\varepsilon'\varepsilon''' + 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 - 2\varepsilon'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\varepsilon''' + 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 - 2\varepsilon'\varepsilon'' + 2\varepsilon'\varepsilon''' - 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

$$\pm e^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + 2\varepsilon'\varepsilon'' - 2\varepsilon'\varepsilon''' - 2\varepsilon''\varepsilon'''$$

Al igual que la consideración anterior se destruyen los dobles productos y quedan como sigue:

$$8e^2 = 8\varepsilon'^2 + 8\varepsilon''^2 + 8\varepsilon'''^2$$

$$e^2 = \frac{8\varepsilon'^2 + 8\varepsilon''^2 + 8\varepsilon'''^2}{8}$$

$$e = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2}$$

Y generalizando estos resultados.

$$e = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \cdots + \varepsilon^{p2}}$$

Si ahora hacemos

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon''' = \cdots = \varepsilon^{p} = \frac{\varepsilon_1}{p}$$

$$\pm e = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{p}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{p}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon_1}{p}\right)^2} = \sqrt{p\left(\frac{\varepsilon_1}{p}\right)^2}$$

$$\pm e = \sqrt{p\frac{{\varepsilon_1}^2}{p^2}} = \sqrt{\frac{{\varepsilon_1}^2}{p}}$$

$$\pm e = \pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

De aquí se sigue que: el error medio del promedio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones que concurren a formarlo.

En otra parte admitimos que la convergencia del promedio de los errores hacia cero, crece con el número de observaciones.

Error probable de una observación

La ecuación que nos da la probabilidad de que un error esté comprendido entre + x y – x es según se dijo antes:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}h^3x^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5x^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7x^7}{3!} + \cdots\right]$$

Mediante esta ecuación podemos pues calcular la probabilidad de que un error esté comprendido entre limites determinados. Pero supongamos que, en lugar de eso, quisiéramos determinar la magnitud de los limites + η y - η entre los que el error debe estar comprendidos para que su probabilidad sea ½. En este caso tendíamos que calcular a η por medio de la expresión:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[h\eta - \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]$$

Lo que es fácil por aproximaciones sucesivas.

Despejando $h\eta$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[h\eta - \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2h\eta}{\sqrt{\Pi}} = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[- \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]$$

$$-\frac{2h\eta}{\sqrt{\Pi}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[- \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]$$

$$-\frac{2h\eta}{\sqrt{\Pi}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[- \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]$$

$$h\eta = -\frac{\sqrt{\Pi}}{2}\left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[- \frac{\frac{1}{3}h^3\eta^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5\eta^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7\eta^7}{3!} + \cdots\right]\right]$$

Si hacemos

$$\theta = h\eta$$

Tenemos

$$\theta = -\frac{\sqrt{\Pi}}{2}\left[-\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[-\frac{\frac{1}{3}\theta^3}{1!}+\frac{\frac{1}{5}\theta^5}{2!}-\frac{\frac{1}{7}\theta^7}{3!}+\frac{\frac{1}{9}\theta^9}{4!}-\frac{\frac{1}{11}\theta^{11}}{5!}+\frac{\frac{1}{13}\theta^{13}}{6!}-\frac{\frac{1}{15}\theta^{15}}{7!}+\frac{\frac{1}{17}\theta^{17}}{8!}-\frac{\frac{1}{19}\theta^{19}}{9!}\dots\right]\right]$$

Obteniendo:

$$h\eta = \theta = 0.4769363$$

$$h\eta = 0.4769363$$

Pero:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

Despejando h de ambas:

$$h = \frac{0.4769363}{\eta}$$

$$h = \frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{2}}$$

igualando tenemos:

$$\frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{2}} = \frac{0.4769363}{\eta}$$

Despejando eta η tenemos:

$$\eta = \varepsilon_1(0.4769363)(\sqrt{2})$$

$$\eta_{50\%} = \varepsilon_1\ (0.6744897)$$

Esta cantidad es el error probable de una observación. (AL 50%)

Error probable del promedio

Si designamos por R el error probable del promedio y por e su error medio, se tendrá

$$\eta_{50\%} = \varepsilon_1\ (0.6744897)$$

$$R_{50\%} = 0.6744897\ e$$

Pero

$$e = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

Entonces

$$R_{50\%} = 0.6744897\ \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

pero

$$\eta_{50\%} = \varepsilon_1\ (0.6744897)$$

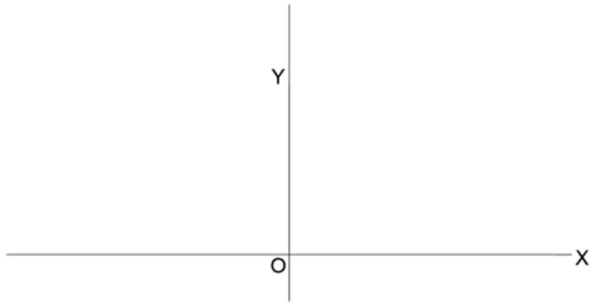
Entonces:

$$R_{50\%} = \frac{\eta_{50\%}}{\sqrt{p}}$$

Lo que quiere decir que "el error probable del promedio es igual al error probable de una observación dividido por la raíz cuadrada del número de observaciones".

Significado geométrico de los resultados anteriores

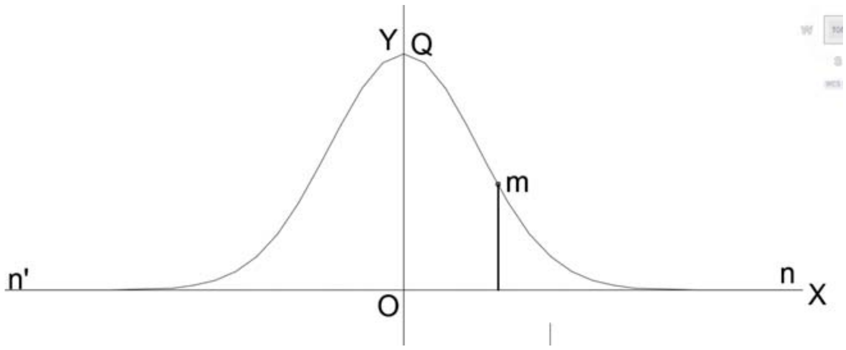
Si tomamos la línea OX como eje de las abscisas y OY como el eje de la ordenada.



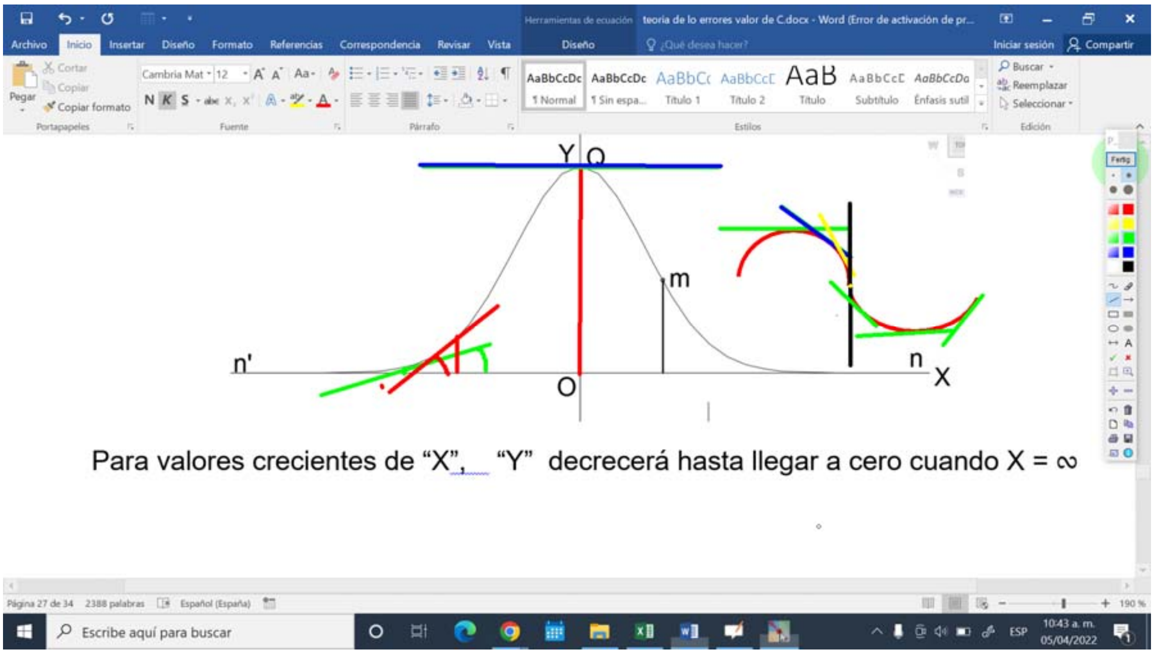
Si sobre estos ejes se se construye la expresión:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

Resulta una curva análoga á: n’ Q m n



Para valores crecientes de “X”,   “Y” decrecerá hasta llegar a cero cuando X = ∞



Por consiguiente, el eje de las “XX” abscisas será asíntota de la curva. Además, como para valores iguales y signos contrarios (el simétrico) de X, las ordenadas resultan con el mismo valor, se sigue que la curva es simétrica, respecto al eje de las “YY” ordenadas.

Veremos ahora si esta curva tiene un punto de inflexión.

Diferenciando la expresión anterior.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h}{\sqrt{\Pi}}\,2h^2xe^{-h^2x^2}$$

Expresión que nos da el ángulo de inclinación de la tangente. Diferenciando otra vez e igualando a cero, resultará:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{h}{\sqrt{\Pi}}\,2h^2e^{-h^2x^2} + \frac{h}{\sqrt{\Pi}}\,4h^4x^2e^{-h^2x^2} = 0$$

Sacando factor común:

$$\frac{h}{\sqrt{\Pi}}\ 2h^2 e^{-h^2x^2}[2h^2x^2-1]=0$$

Despejando X tenemos

$$[2h^2x^2-1]=0$$

$$[2h^2x^2]=1$$

$$[x^2]=\frac{1}{2h^2}$$

$$x=\frac{1}{h\sqrt{2}}$$

Pero se recordará que

$$\epsilon_1=\frac{1}{h\sqrt{2}}$$

Luego

$$x=\epsilon_1$$

Que nos da el valor de la abscisa a que corresponde el máximo del ángulo de inclinación de la tangente con el eje de las “XX”

Además, la expresión

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{h}{\sqrt{\Pi}}\ 2h^2e^{-h^2x^2}+\frac{h}{\sqrt{\Pi}}\ 4h^4x^2e^{-h^2x^2}=0$$

Puede escribirse sacando como factor común

$$\frac{4h^5}{\sqrt{\Pi}}\ e^{-h^2x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4h^5}{\sqrt{\Pi}}\ e^{-h^2x^2}\left[x^2-\frac{1}{2h^2}\right]$$

Que muestra que el coeficiente diferencial de segundo orden cambia de signo cuando x^2 pasa de

$$x^2 > \frac{1}{2h^2} \qquad a \qquad x^2 < \frac{1}{2h^2}$$

Luego el punto que tiene por abscisa

$$x = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \epsilon_1$$

Es un punto de inflexión. Así pues, el error medio de una observación es la abscisa del punto de Inflexión de la curva de las probabilidades.

La precisión del promedio

Si en la ecuación

$$h\eta = 0.4769363$$

designamos por H la precisión del promedio y R se error probable tendremos

$$HR = 0.4769363$$

Despejando H

$$H = 0.4769363\frac{1}{R}$$

Y sustituyendo R tenemos

$$R = 0.6744897\ \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

$$H = 0.4769363\frac{1}{0.6744897\ \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}}$$

$$H = 0.4769363\frac{\sqrt{p}}{0.6744897\ \ \varepsilon_1}$$

Pero

$$\eta_{50\%} = \varepsilon_1\ (0.6744897)$$

$$H = 0.4769363 \frac{\sqrt{p}}{\eta_{50\%}}$$

Además

$$h = \frac{0.4769363}{\eta}$$

Entonces

$$H = h\sqrt{p}$$

Esta última expresión es la precisión del promedio.

Tabla de probabilidades

Por medio de la ecuación

$$P = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}h^3x^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}h^5x^5}{2!} - \frac{\frac{1}{7}h^7x^7}{3!} + \cdots\right]$$

Que nos da la probabilidad de que un error este comprendido entre +x y –X.

Se puede calcular una tabla para encontrar la probabilidad de un error determinado, dando a hx valores sucesivamente crecientes.

Pero para mayor facilidad, sustituiremos su equivalente

$$h\eta \frac{x}{\eta}$$

pero como

$$h\eta = 0.4769$$

tendremos

$$0.4769363 \frac{x}{\eta_{50\%}}$$

Que sustituiremos en cada término de la serie y tendremos entonces, tomando como argumento a.

$$\frac{x}{\eta}$$

Que es a relación del error al error probable, dando sucesivamente los valores: 0, 0.1, 0.2, 0.3, …etc.

$$P = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\left[0.4769363\frac{x}{\eta_{50\%}} - \frac{\frac{1}{3}\ \ (0.4769363\frac{x}{\eta_{50\%}})^3}{1!} + \frac{\frac{1}{5}(0.4769363\frac{x}{\eta_{50\%}})^5}{2!} - \cdots\right]$$

Y obtendremos la siguiente tabla:

XIX El verdadero valor de error medio del promedio

Para poder concluir estos temas, es necesario observar que el valor dado para

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{suma\ de\ los\ cuadrados\ de\ todos\ los\ errores}{numero\ total\ de\ errores}}$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p}}$$

No es rigurosamente el error medio tal como lo definimos, es más bien la separación media respecto al promedio. En efecto la suma delas observaciones dividida por su número, o sea $\frac{[o]}{p}$, no es el valor real de la incógnita *O*, o lo que es lo mismo, no es el verdadero valor da la cantidad que se quiere determinar, sino su valor mas probable, entonces las cantidades, ε', ε'', ε'''…no serán los valores de los errores reales, y por consiguiente habrá que corregir los valores encontrados para ε_1, e, R, η, h y H.

El error medio del promedio *O* es:

$$\pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

Se puede considerar que el valor más racional de la cantidad buscada es

$$O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$

Entonces se tendrá para cada uno de los errores los valores siguientes

$$O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o'$$

$$O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o''$$

$$O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o'''$$

Y el error medio de una observación seria, según su definición:

$$\varepsilon_1{}^2 = \frac{\left[O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o'\right]^2 + \left[O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o''\right]^2 + \left[O \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} - o'''\right]^2 + \cdots}{p}$$

Y podrá reescribirse de la siguiente manera:

$$\varepsilon_1{}^2 = \frac{\left[(O - o') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[(O - o'') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[(O - o''') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \cdots}{p}$$

Pasando p al numerador, al primer miembro, resultara:

$$p\varepsilon_1{}^2 = \left[(O - o') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[(O - o'') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[(O - o''') \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \cdots$$

Desarrollando los cuadrados

$$p\varepsilon_1{}^2 = (O - o')^2 + (O - o'')^2 + (O - o''')^2 + \cdots + 2(O - o')\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} + 2(O - o'')\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$$
$$+ 2(O - o''')\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}} + \cdots + \left[\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2 + \left[\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2$$

Agrupando términos

$$p{\varepsilon_1}^2 = (O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2 + \cdots + 2\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}[O-o'+O-o''+O-o'''] + p\left[\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p}}\right]^2$$

pero la cantidad que está dentro de paréntesis del segundo término del segundo miembro, es evidentemente igual a cero, puesto que es la suma de los errores.

$$p{\varepsilon_1}^2 = (O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2 + {\varepsilon_1}^2$$

$$p{\varepsilon_1}^2 - {\varepsilon_1}^2 = (O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2$$

$${\varepsilon_1}^2(p-1) = (O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2$$

$${\varepsilon_1}^2 = \frac{(O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2}{(p-1)}$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{(O-o')^2 + (O-o'')^2 + (O-o''')^2}{(p-1)}}$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p-1}}$$

Ley de Propagación de los errores

Cuando se suman valores de medidas directas para calcular resultados finales, tales como para obtener medidas indirectas, es necesario cuidar de no acarrear errores accidentales excesivos dentro de los resultados. Por lo mismo es necesario conocer la magnitud del error en el resultado después de ejecutar las operaciones aritméticas sobre cualquier valor medido o en el promedio de varios valores. Las reglas generales de la propagación de os errores se refieren a error medio del promedio, error medio de una observación, error probable de una observación y error probable del promedio.

Suma de valores conteniendo errores

$$e = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \cdots + \varepsilon^{P2}}$$

AB = 436.332 +- 0.016

Si la línea ABCD se mide para determinar la longitud AD, tomando para este caso tres segmentos, cada uno de los cuales ha sido medido varias veces y se obtiene el promedio.

AB 107.162 ε_1 = +- 0.002

BC 491.043 ε_1 = +- 0.010

CD 216.191 ε_1 = +- 0.005

Determinar la distancia AD y su error propagado.

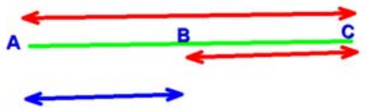
AD 814.396 ε_1 = +- 0.01135

Sustracción de valores conteniendo errores

Distancia AC = 1076.367 +- 0.005

Distancia BC = 347.854 +- 0.012

Distancia AB = 728.513 +- 0.013



Multiplicación de valores conteniendo errores

$$(A \pm E_A)(B \pm E_B) = AB \pm AE_B \pm BE_A \pm E_A E_B$$

$$E_{AB} = \sqrt{(BE_A)^2 + (AE_B)^2}$$

Ejemplo

Ancho = 75 +- 0.003 m

Largo = 100 +- 0.008 m

Calcular el área del rectángulo y su error propagado.

Área = 7500 +- 0.6708 m2

$$E_{AB} = \sqrt{(100 * 0.003)^2 + (75 * 0.008)^2}$$

División de valores conteniendo errores

EN EL PRODUCTO VIMOS QUE ES AB

$$E_{AB} = \sqrt{(BE_A)^2 + (AE_B)^2}$$

En la división $\frac{A}{C} = A\,(\frac{1}{C})$ $E_{\frac{A}{C}} = \sqrt{\left(\frac{1}{C}E_A\right)^2 + \left(A\,(-\frac{1}{C^2}E_C)\right)^2}$

$$\frac{A}{C} = A\left(\frac{1}{C}\right) = AB \quad con\ B = \frac{1}{C}\ \ entonces\ dB = -\frac{1}{C^2}dc$$

$$E_B = -\frac{1}{C^2}E_C$$

$$E_{\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{A^2}{C^2}\frac{C^2}{A^2}\left[\left(\frac{1}{C}E_A\right)^2 + \left(A\ \frac{1}{C^2}E_C\right)^2\right]}$$

$$E_{\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{A^2}{C^2}\left[\left(\frac{C}{AC}E_A\right)^2 + \left(A\ \frac{C}{AC^2}E_C\right)^2\right]}$$

$$E_{\frac{A}{C}} = \frac{A}{C}\sqrt{\left[\left(\frac{E_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_C}{C}\right)^2\right]}$$

En un caso en donde se desea trazar un rectángulo PQRS, para un edificio cuya área debe ser 200 +- 0.165 m2, y cuya dimensión fija necesariamente debe es de RS = 10.0 +-0.008 m ¿Cuál es la dimensión del lado perpendicular PQ a este?

Lado faltante = 20.000 +- 0.0229 m

Elevación a una potencia de una cantidad que contiene error

$$E_{AB} = \sqrt{\frac{A^2B^2}{A^2B^2}[(BE_A)^2 + (AE_B)^2]}$$

$$E_{AB} = \sqrt{\frac{A^2B^2}{1}\left[\left(\frac{BE_A}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AE_B}{AB}\right)^2\right]}$$

$$E_{AB} = AB\sqrt{\left[\left(\frac{E_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_B}{B}\right)^2\right]}$$

En lugar de B sustituimos por A para que se asemeje a A2

$$E_{AB} = AA\sqrt{\left[\left(\frac{E_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_A}{A}\right)^2\right]}$$

Después en lugar de A2 supondremos que ahora será An quedando como sigue:

$$E_{AB} = A^N\sqrt{\left[N\left(\frac{E_A}{A}\right)^2\right]}$$

Extrayendo el paréntesis al cuadrado de la raíz, queda:

$$A^N\frac{E_A}{A}\sqrt{[N]}$$

$$E_{A^N} = A^{N-1}E_A\sqrt{[N]}$$

$$E_{A^N} = NA^{N-1}E_A$$

Nuestra suposición implicaría no obstante, que el valor E_A no está determinado por la cantidad A, sino que, puede ser difernte el valor cada vez que se use A. Lo que no es el caso, puesto que la cantidad A tiene un valor fijo y un error E_A fijo por siempre. Por lo tanto, una vez que la medida de A se completa, el error E_A se fija y no variará así como para compensar o tender a compensar. Por lo tanto, la evaluación correcta de E_{A^N} (Elevación a una potencia de una cantidad que contiene error), puede hacerse, si notamos que E_A está involucrado n veces y no raíz de n veces, así correctamente el cálculo se podrá realizar de la manera siguiente:

$$E_{A^N} = \pm NA^{N-1}E_A$$

Ejemplo

Si un cubo perfecto de cristal de sílice se mide con un micrómetro microscópico el resultado es 4 +- 0.02 micrómetros. ¿Cuál es su volumen y el error en la medida?

V= 64 +- 0.96 µm3

Ejemplo

Encontrar el error propagado en el volumen de una esfera cuyo diámetro, medido repetidamente, resulta ser de 4+- 0.006 cm.

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

$$\left(\frac{1}{2}4 \pm \frac{1}{2}0.006 \quad\right) = 2 \ \pm 0.003$$

$$E_{r^3} = \pm 3 * 2^{3-1}0.003 = 8 \pm 0.036$$

$$V = \left(\frac{4}{3}\pi \right)(8 \pm 0.036) = 33.510 \pm 0.151 cm^3$$

$$V = \ 33.510 \ \pm 0.151$$

Multiplicación de valores conteniendo errores por una constante:

$$C(A \pm E_A)$$

$$(CA \pm CE_A)$$

$$E_{por\ constante} \ = \ \pm C\ E_A$$

Raíz de cantidades conteniendo errores

$$E_{A^N} = \pm N A^{N-1} E_A$$

$$E_{A^{\frac{1}{N}}} = \pm \frac{1}{N} A^{\frac{1}{N}-1} E_A$$

$$E_{A^{\frac{1}{N}}} = \pm \frac{A^{\frac{1}{N}} E_A}{NA}$$

Ejemplo

Si un cuadrado perfecto debe medirse, de manera que su área sea 16 +- 0.008 m2. ¿Cuál es la longitud de su lado?

$$E_{A^{\frac{1}{N}}} = \pm \frac{16^{\frac{1}{2}}\, 0.008}{2(16)}$$

Lado del cuadrado = 4 +- 0.001

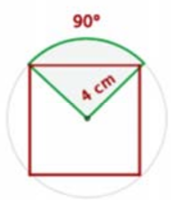
H = CO sen A

Ejercicios

Calcular lo que se pide junto el error propagado en cada uno de los ejercicios siguientes:

1-

Hallar el **área del sector circular** cuya **cuerda** es el lado del **cuadrado inscrito**, siendo 4 cm el **radio** de la **circunferencia**.



$$A = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 90}{360} = 12.57 \ \text{cm}^2$$

Radio 4 cm +- 0.002

Angulo 90ª +- 8”

Determinar el área que se marca en color naranja si el cuadro mine por lado 4 m +- 0.008 y su error propagado.